代数方程式のガロア群と折紙による解法について*

中村怜子（学籍番号　200721546）
研究指導教員：森継修一

1．はじめに

古代ギリシア時代から、作図は定木とコンパスのみを用いて行うものとされてきた。定木とコンパスで作図可能なのは 2 次までの代数方程式の解である。ギリシアの 3 大作図問題が作図不可能問題であることは、3 次方程式、または超越数を含むことによる。

一方、折紙を用いた作図では、3 次以上の代数方程式の解を折ることが可能である。3 次方程式については、実数係数による解法が既に示されている[1]。4 次方程式については、原理的に可解であることが分かっている[2]が、具体的な折り方は示されていない。

本研究では、4 次以上の代数方程式の折紙による解法について、実数係数による折り方を探るため、先行研究による解法例と、代数方程式の解の構造を表すガロア群を基に検討した。

2．代数方程式の折紙による解法

折紙の作図には、一つの折り目を折る single-fold と、二つ以上の折り目を同時に折る multi-fold という手法がある。single-fold については、Huzita の公理[3]と呼ばれる 6 つの折り方と、Justin、Hatori が発見したもう1つの折り方により全ての作図を示せることが知られている。single-fold では 4 次方程式までの、multi-fold ではそれ以上の次数の方程式の解が折れるとされている。

2.1　4 次方程式の解法

Edwards＆Shurman は円と放物線の共通接線から 4 次方程式の解を求めている[4]。与えられた 4 次方程式の係数を基に円と放物線の式を作り、共通接線の y 切片を求めると、それがもとの 4 次方程式の解となる。Edwards＆Shurman が挙げた具体例から、実際に円と放物線の式、放物線の焦点と準線の式を計算した。この方法では、変数変換が複雑なため、実数係数から解の折り方を示すことは困難であることを確認した。

2.2　5 次方程式の解法

Lang による、two-fold を用いた折紙による 5 次方程式の解法例[5]に対し、初等幾何による証明を与えた。Lang は角の 5 等分から導かれる 5 倍角の公式によって、5 次方程式の解法例としている。証明により、この方法で導かれるものは 2 倍角の公式までであることが確認されたため、5 次方程式の解法例としての妥当性には疑問が残る。5 次方程式については、Ghourabi らにより four-fold で解けることが確認[6]されているが、これも角の 5 等分によるものであり、角度に限定した特殊な例である。

multi-fold による代数方程式の解法について、Lang らは、代数的に可解な n 次方程式については (n−3)-fold で、代数的に可解でないものについては(n−2)-fold で解けることを主張している[7]。これは 5 次以上の代数方程式において証明がなされていないが、これが正しければ、折紙の作図によって、代数的可解性を超えた解法を示すことができるということになる。また、代数方程式の代数的可解性と折紙による解法の間には何らかの関係があるということになる。

3．代数方程式のガロア群

ガロア群は、一般の 5 次方程式の代数的解法を求める中で発見されたものである。代数方程式の代数的可解性は、その方程式のガロア群の可解性に帰結する。

ここでは解の分類について、ガロア群の利用を試みた。

3.1　4 次方程式のガロア群

3 次分解式 $g(x)$のガロア群の位数 m による、有理数体上既約 4 次方程式 $f(x)$のガロア群の分類は以下のとおりである。

* "Solving algebraic equations by Origami and Galois groups" by Satoko NAKAMURA

(1)$m=6$のとき$G \cong S_4$
(2)$m=3$のとき$G \cong A_4$
(3)$m=1$のとき$G \cong V$
(4)$m=2$のとき

$$\begin{cases} f(x)\text{が}g(x)\text{の最小分解体内で既約のとき}G \cong D_8 \\ f(x)\text{が}g(x)\text{の最小分解体内で可約のとき}G \cong Z_4 \end{cases}$$

3.2 4 次方程式のガロア群と解の個数による分類

折紙による 3 次方程式の解法において、実数解の個数による 2 通りの折り方が存在する。4 次方程式についても解の個数による折り方の違いが存在すると考えられる。3 次方程式については実質的に、判別式による解の分類が可能であった。解のパターンが複雑になる 4 次方程式について、解の分類にガロア群の利用を試みた。4 次方程式を、§3.1 で示したガロア群と解の個数によって分類し、該当例を示した。結果は表1の通りである。

ガロア群	m	実数解0個	実数解2個	実数解4個
S_4(4T5)	6($D>0$)	x^4+x^2+x+1	—	x^4-4x^2+x+1
	6($D<0$)	—	x^4-x-1	—
A_4(4T4)	3	$x^4+3x+9/4$	—	x^4-7x^2+3x+1
V(4T2)	1	x^4+3x+9	—	x^4-10x^2+1
D_4(4T3)	2($D>0$)	x^4-4x^2+5	—	$x^4-4x^2+7/2$
	2($D<0$)	—	x^4+x^2-1	—
Z_4(4T1)	2	x^4+4x^2+2	—	x^4-4x^2+2

4T1~4T5：Mapleの関数galoisが出力するラベル
—：理論上起こらない組み合わせ

表１：4 次方程式のガロア群による分類

判別式との組み合わせにより、実数解 0、4 個の場合と実数解 2 個の場合が分類できることが分かる。0 個と 4 個の場合分けについては、今後の検討課題である。

4. おわりに

本研究では、4 次方程式と 5 次方程式の折紙による解法について、先行研究の内容を検討し、一部に証明を与えた。また、代数方程式の解の構造を示すガロア群の利用を提案し、ガロア群と実数解の個数による解の分類を試みた。

4 次方程式について、円と放物線の接線から折り方を求めるには変数変換が複雑であることを確認した。また、ガロア群と判別式との組み合わせにより、解のパターンを一部分類できることを示した。ガロア群については、multi-fold による代数方程式の解法について方程式の代数的可解性と折紙による解法との関係が指摘されているため、今後、更に調べていく必要があると考えられる。

5 次方程式について、Lang の two-fold による角の 5 等分に証明を与えた。この手法では実質的に 2 倍角の公式までしか扱っていないことが確かめられた。従って、折紙による一般の 5 次方程式の解法については、今後改めて検討していく必要がある。

文献

[1] 森継修一. 折り紙による 3 次方程式の解法について. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 1, pp.79-92, 2006.

[2] ロベルト・ゲレトシュレーガー. 折紙の数学. 深川英俊訳. 森北出版, 2002.

[3] H.Huzita. Axiomatic development of origami geometry. In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology,* pp. 143-158, 1989.

[4] B.C. Edwards and J. Shurman. Folding quartic roots. MATHEMATICS MAGAZINE, Vol. 74, No. 1, pp. 19-25, 2001.

[5] R.J. Lang. Angle quintisection. http://www.langorigami.com/science/quintisection/quintisection.pdf (参照 2009-01), 2004.

[6] F. Ghourabi, T. Ida, and H. Takahashi. Computational Origami of Angle Quintisection. *SCSS 2008, RISC-Linz Report Series* 08-08, pp. 57-68, 2008.

[7] R.C. Alperin and R.J. Lang. One-, two-, and multi-fold origami axioms. In *Proceedings of 4th International Conference on Origami, Science, Mathematics and Education (4OSME),* 2006.