幾何学的な量子アルゴリズム生成問題における距離の評価 *

中島孝雄（学籍番号　200821668）
研究指導教員：鎮目浩輔
副研究指導教員：松本紳

1. 研究背景

量子計算は量子力学に基づく新しい計算手法であり、ある種の問題を古典計算よりも効率的に解くことが可能だと言われている。

量子計算とは spin と呼ばれる物理量の状態を磁場や相互作用のコントロールで変化させ、計算作業に対応するような時間的変化を起こすことである。量子計算では spin のことを qubit と呼ぶ。数学的には qubit は複素列ベクトルで表され、状態の変化はその列ベクトルにある Unitary 行列をかけることで表される。

複雑な計算では複数の qubit を相互作用させて状態を変化させることが必要であるが、それを一度に行うことは難しいため、あらかじめ決められた数種類の量子ゲート(一つの qubit のみに磁場をかけるか、二つの qubit に CNOT と呼ばれる相互作用をさせる操作)を逐次的に qubit に施す。この量子ゲートを qubit に逐次的に施す順番のことを量子アルゴリズムと呼ぶ。数学的には計算作業に対応する複雑な Unitary 行列 W を量子ゲートでの変化に対応する単純な行列 g_i の積として分解することを意味する。

$$W=g_m g_{m-1} g_{m-2}\cdots g_2 g_1$$

量子アルゴリズムが効率的であるためには、W が与えられたとき W の構築に必要なゲート数の増加が qubit 数 n の多項式で済むことが要求される。W の量子アルゴリズムを生成する一般的な方法は存在するが、この条件を満たすことは困難である。

2. 先行研究

2.1 Quantum Computation as Geometry [1]

この問題に対し、Nielsen 等は行列空間上に長さを定義しアルゴリズム生成問題を幾何学の曲線探索問題に作り変えた。

つまり、単位行列 I と計算に対応する Unitary 行列 W を結ぶ qubit 数 n の多項式曲線が得られれば、その曲線を基に必要なゲート数が n の多項式で増える効率的な量子アルゴリズムを生成できることを示した。従って I と W を結ぶ最短曲線が得られれば、最も効率の良い量子アルゴリズムが作れる。しかし二点間を結ぶ最短曲線の具体的な探索方法はいまだ不明である。

また、Nielsen 等はゲート数 $G(W)$ と距離 $D(I,W)$(最短曲線の長さ)の間に以下の関係があることを示した。

$$D(I,W)\leqq G(W)$$

これは曲線の長さが実際に必要なゲート数以上だった場合には、その曲線は最短ではないことを意味する。

2.2 Time complexity and gate complexity [2]

Koike 等は時間をコストとした Unitary 行列生成問題に最適制御分野で知られている Krotov 法[3]を適用し、次のことを示した。(1)量子フーリエ変換 QFT の時間コストは n の多項式。(2)多重制御 NOT $C^{n-1}NOT$ の時間コストは n の指数関数。(3)量子フーリエ変換 QFT の 2qubit Hamiltonian 成分は対称性を持つ。

3. 研究概要

本研究では、Krotov 法を Nielsen 等の最短曲線探索問題に適用し、指定した二点間を結ぶ測地線を探索する手法を開発した。測地線とは長さが極値をとる曲線で、最短曲線の候補となるものである。そして、開発した測地線探索手法を用いて次のことを行った。(1)2qubit における Krotov 法の漸化式の働きの可視化。(2) 単位行列 I と量子フーリエ変換 $QFT(n=3,4,5)$ を結ぶ測地線の探索およびその長さの計算。(3) 単位行列 I と多重制御 NOT $C^{n-1}NOT(n=3)$ を結ぶ測地線の探索およびその長さの計算。(4) 得られた測地線の

* “Estimations of distances of the geometry of quantum computation” by Takao NAKAJIMA

Hamiltonian の成分の調査。

4. シミュレーション結果

4.1 2qubit における Krotov 法の漸化式の可視化

Gu 等[4]は Nielsen 等の長さの定義の下で 2qubit における距離の近似式を導出した。この近似式は三次元ユークリッド空間として可視化することができるため、可視化によって Krotov 法の漸化式がどのように働くかを調べた。その結果次のことが分かった(1)漸化式を繰り返し解くことによって得られる曲線は新しいものほど終点が W に近づき、同時に曲線自体が測地線に収束する。(2)曲線の長さが距離よりも長い場合は測地線に収束せず曲線はたるむ。

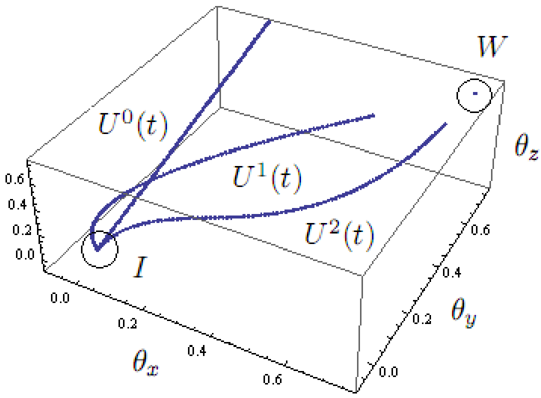

図 1:Krotov 法の漸化式による測地線探索。U^0(t)、U^1(t)、U^2(t)と新しい曲線ほど終点が W に近付く。最終的には I と W を結ぶ線分(測地線)に収束する。

4.2 単位行列 I と量子フーリエ変換 $QFT(n)$,n=3, 4, 5 を結ぶ測地線の探索とその長さ

開発した手法を用いて、単位行列 I と量子フーリエ変換 $QFT(n)$, n=3, 4, 5 を結ぶ測地線を探索し、その長さを計算した結果次のことが分かった。(1)測地線の長さは n の多項式で増加する。(2)測地線の長さはゲート数の 1/4 倍以下であり、Nielsen 等の不等式を満たしている。(3)2qubit Hamiltonian は対称性を持つ。

4.3 単位行列 I と多重制御 NOT $C^{\beta-1}NOT$ を結ぶ測地線の探索とその長さ

本研究で多重制御 NOT $C^{n-1}NOT$ の厳密解の一つを見出した。但し、n=3 の場合の Nielsen 等の長さは 25.2 であり、構築に必要な量子ゲート数 16 よりも多く Nielsen 等の不等式を満たしていない。

開発した手法を用いて、単位行列 I と多重制御 NOT $C^{\beta-1}NOT$ を結ぶ測地線を探索し、その長さを計算した結果、Nielsen 等の不等式を満たす測地線を得た。その長さは 1.8 である。

5. 結論

5.1 考察

今回得られた測地線は最短とは言い切れないが、全て Nielsen 等の不等式を満たす。また、QFT(3)では 4^3−1 個の初期曲線を取ったが全て同じ結果となった。これらは本研究で開発した手法が最短測地線を探す手法である可能性を示唆していると考えられる。

量子フーリエ変換の長さが n の多項式であることや、Hamiltonian の対称性は Koike 等の時間をコストとした最適解の性質と同等であることから、ゲート計算量と時間計算量との間に密接な関係があることが考えられる。

5.2 課題

開発した手法は n に対して指数関数的に計算時間がかかるため改良が必要である。

ゲート計算量と時間計算量の関係を調べるため、qubit 数を増やして $C^{n-1}NOT$ の長さの計算を行うことが必要である。これは n の指数関数で増えると予想される。また、他の Unitary 行列(例えば置換)に対してシミュレーションを行うことも考えられる。

さらに得られた測地線の最短性を調べる必要がある。例えば幾何学のツール CutPoint を計算する機能を追加することが挙げられる。

文献

[1]Nielsen,Dowling,Gu,Doherty.QuantumComputation as Geometry.Science311,p1133(2007)

[2]Koike,Okudaira.Time complexity and gate complexity.quant-ph/0910.5587v1(2009)

[3]Krotov,Global Methods in Optimal Control theory.Marcel Dekker Inc(1995)

[4]Gu.Quantum control via geometry:An explicit example.PRA78,032327(2008)