数値計算法 (オーム社, 1998)　1. 線形方程式 訂正

1.3 ノルム, 誤差, 残差, 条件数 p. 5 下から 3 行目

$$(\lambda \max(A^T A))^{\frac{1}{2}} = |\lambda \max(A)|$$

1.4.1 直接法　– ガウスの消去法 –　p. 9 下から 11 行目付近

$$\begin{cases} \alpha_{i1} & = & -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}} & & & \\ a_{ij}^{(1)} & = & a_{ij} & + & \alpha_{i1} a_{1j} & (i,j = 2, \cdots, n) \\ b_i^{(1)} & = & b_i & + & \alpha_{i1} b_1 & (i = 2, \cdots, n) \end{cases}$$

1.4.1 直接法　– ガウスの消去法 –　p. 10 下から 2 行目

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ -1x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -3 \end{cases} \tag{1.14}$$

前進消去過程 p. 11 下から 13 行目から

$k = 1$ 段:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -3 \\ -1x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

第 2 番方程式の x_1 を消去するため 第 1 番方程式 $\times (\frac{1}{3})$ を第 2 番方程式に加える.

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

〈例 **1.1**〉 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を部分軸選択つきガウスの消去法で解く.

1 行追加

for $j = k+1, k+2, \cdots, n$

$a_{ip,j} \rightleftharpoons a_{kj}$

$b_{ip} \rightleftharpoons b_k$

以下の 2 行を訂正

if $ir = 0$ then

for $k = n, n-1, \cdots, 1$

$$x_k = (b_k - \textstyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \cdot x_j)/a_{kk} \qquad (***)$$

$k = 2$ 段:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

後退代入過程

$k = 3$ 段: $\frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3}$ より $x_3 = 1$.

1.4.2 反復法 – クリロフ部分空間法– p. 16 上から 5 行目

スカイライン行列

〈例 **1.4**〉 上階段化ガウスの消去法を用いて行列 A のランクを求める.

以下の 2 行を訂正

$$\alpha_{ik} = -a_{ik}/a_{k-ir,k}$$
$$\text{for } j = k+1, k+2, \cdots, n$$
$$a_{ij} = a_{ij} + \alpha_{ik} \cdot a_{k-ir,j}$$

〈例 **1.5**〉 修正グラム・シュミット法を用いて行列 A を QR 分解する.

以下の 2 行を訂正

$$r_{i-1,j} = (\boldsymbol{q}_{i-1}, \boldsymbol{a}_j)$$
$$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j - r_{i-1,j}\boldsymbol{q}_{i-1}$$

1.4.2 反復法 – クリロフ部分空間法– p. 17 下から 5 行目

$$= \quad f(\boldsymbol{x}_k) - \alpha_k(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k) + \frac{1}{2}\alpha_k^2(\boldsymbol{p}_k, A\boldsymbol{p}_k) \tag{1.18}$$

1.4.2 反復法 – クリロフ部分空間法– p. 18 下から 6 行目

$$(\boldsymbol{p}_i, A\boldsymbol{p}_j) = 0; i \neq j \quad \text{(共役直交性)}$$

1.4.2 反復法 – クリロフ部分空間法– p. 20 上から 5 行目

($M = A$,$N = I$ なら解けたことになる).

〈例 1.6〉 p. 28 上から 5 行目

$\boldsymbol{x}^{(k)} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{(k-1)}/||\tilde{\boldsymbol{x}}^{(k-1)}||$

〈例 1.7〉 p. 29 上から 5 行目

$\boldsymbol{x}^{(k)} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{(k-1)}/||\tilde{\boldsymbol{x}}^{(k-1)}||$

1.8 特異値分解 p. 30 1 行目

$m \times m$ の正規直交行列 U, $m \times n$ の対角行列 Σ, $n \times n$ の正規直交行列 V

演習問題 4. p. 31 下から 4 行目

対称正定値行列 A からなる汎関数

演習問題の略解 1 章 5. p. 184 下から 3 行目より

5. 式 (1.20) より

$$
\begin{aligned}
&\text{式 (1.21) より} \\
&\qquad = \alpha_k \beta_k (A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k) \\
&\text{式 (1.19) を用いて} \\
&\qquad = \beta_k (\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k)
\end{aligned}
$$

2000 年 1 月 25 日 長谷川秀彦