

# 計算数学 LAB2

2006.7.3. 1/2  
2007.7.9.

1. CG法を用いて連立1次方程式  $Ax=b$  を解く ( $A$ は対称)

CG(A, b)

反復回数,  $\|r_k\|$ ,  $R^T R$ ,  $P^T A P$  が表示される。Rの列ベクトルは  $r_k$ , Pのk列ベクトルは  $p_k$  である。

- 収束すると,  $(r_i, r_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $(p_i, A p_j) = 0$  ( $i \neq j$ ) を確かめよ。

難 2. Conjugate Residual (共役残差法) は  $(r_k, r_k)$  を最小化する反復法である。以下のアルゴリズムに基づいて  $CR(A, b)$  を作ってみよ。

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k p_k$$

とあって  $(r_{k+1}, r_{k+1})$  を最小化するように  $\alpha_k$  を求める。

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

として  $A p_{k+1}$  と  $A p_k$  が直交するように  $\beta_k$  を求める。

- 収束すると,  $(A p_i, A p_{i+1}) = 0$ ,  $(r_i, A p_{i+1}) = 0$  を確かめよ。

3. 対称行列  $A$  に対して Givens 回転を適用するには

$$A = \text{Givens}(A, i, j)$$

とすれば左辺の  $A$  には  $R^T A R$ ,  $R$  は Givens 回転の行列が入る。

- この操作を何度か繰り返して、固有値を求めてみよう。どのようにすれば、効率よく対角化できるだろうか?
- 対角化はたいへんだが、3重対角化は容易である(本当?)

4. 対称行列  $A$  に対してべき乗を施せば、絶対値最大の固有値に対する固有ベクトル,  $L_1$ -normを用いて固有値を求めることができる。

- 任意のベクトルに  $A$  を作用させ(必要ならば正規化し)絶対値最大の固有値に対応する固有ベクトルの方向に収束することを確認せよ。

5. 逆反復法を用いて、対称行列  $A$  の  $\alpha$  に近い固有値を求めるには

$$\text{gyaku}(A, \alpha)$$

とすれば、回数  $k$ , 固有値の近似値  $\lambda_k$ , 残差  $r_k$  が表示される。

難 区間  $\alpha_L$  から  $\alpha_R$  まで  $\Delta\alpha$  おきに探索するには

$$\text{loop}(A, \alpha_L, \alpha_R, \Delta\alpha)$$

と与えればよい。

- 対称行列  $A$  の固有値分布と  $\pm 7$  点  $\alpha$  のとり方によって固有値に収束するまでの反復回数ほどのように変化するか?

MATLAB コマンド

$$A = [1 -1 0 0 0; \dots -1 2 -1 0 0; \dots 0 0 0 -1 2]$$

$$x = [1 1 1 1 1]'$$

$$b = A * x$$

$$[V D] = \text{eig}(A) \quad \begin{cases} V(:, 1) \dots \text{1 体目の固有ベクトル} \\ V \text{ は固有ベクトル, } D \text{ は固有値 (対角要素)} \end{cases}$$

$$x' * y \quad x \text{ と } y \text{ の内積}$$

$$\text{sqr}(x' * x) \quad x \text{ の } 2\text{-ノルム}$$

$$\text{eigshow}$$

$$\text{help}$$

<http://www.s.lis.tsukuba.ac.jp/>

~hasegawa/TUS/