1.



2/2

4. 対称行列 A に対してべき乗を施せば、絶対値最大の固有値に対する固有ベクトル、レイリー商を用いて固有値を求めることができる

- 任意のベクトルに A を作用させ(必要ならば正規化し)絶対値最大の固有値に対応する固有ベクトルの方向に収束することを確かめなさい

5. シフト付き逆反復法を用いて、対称行列 A の $\alpha$ に近い固有値を求めるには

gyaku(A, $\alpha$)

とすれば、回数 k、固有値の近似値 $\lambda_k$、残差 $r_k$ も表示される。

また、区間 $x_l$ から $x_r$ までを $\Delta x$ おきに探索するには

loop(A, $x_l$, $x_r$, $\Delta x$)　　gyaku1 使用

と与えればよい。

- 対称行列 A の固有値分布とシフト点 $\alpha$ のとり方によって固有値に収束するまでの反復回数はどのように変化するか?

① ②

MATLABコマンド

```
A=[1 -1 0 0 0; -1 2 -1 0 0; 中略; 0 0 0 -1 2]
x=[1 1 1 1 1]'
b = A*x
[V D] = eig(A)
x'*y
sqrt(x'*x)
eigshow
help
```

V(:,1)… 1本目の固有ベクトル

[V D] = eig(A) … Vは固有ベクトル、Dは固有値(対角要素)

x'*y　xとyの内積

sqrt(x'*x) … xの2-ノルム

http://www.slis.tsukuba.ac.jp/~hasegawa/TUS/

---

- べき乗法は下のコマンドを使って手計算(MATLABを電卓のように使う)
- 逆反復法は B = inv(A) としてべき乗法、これも手計算

2.

実習　まず、方程式の A, b を与える
b は解 $x$ を決めて $b = A * x$ で求めるとよい

(a)〜(d) をくり返し、どのような $A_0$ (と R) がよいかを考える
(a) $A_0$ を決める
(b) $R = A_0 - A$ を求める
(c) LEQ($A_0$, R, b) を実行する
収束まで、残差がどう変化するかをみる
解 $x$ は定めた値と等しいか？
(d) スペクトル半径 $\rho(A_0^{-1}R)$ を求める
収束するためにはスペクトル半径 < 1

## 定常反復法

○ Jacobi法　$n$ 本の方程式を独立に

$$x_i^{(k)} = \left\{ b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right\} / a_{ii}$$

○ Gauss-Seidel 法　$i$ より前の $x_l^{(k)}$ を利用する

$$x_i^{(k)} = \left\{ b_i - \underbrace{\sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)}}_{\text{この部分がより新しい値}} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right\} / a_{ii}$$

○ Successive Over-Relaxation 法（逐次的過剰緩和法）

$$x_i^{(k)} = \omega \tilde{x}_i^{(k)} + (1-\omega) x_i^{(k-1)}$$

$$\tilde{x}_i = \left\{ b_i - \sum_{j<i} a_{ij} \tilde{x}_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right\} / a_{ii}$$ : Gauss-Seidel法の反復解

$x_i^{(k)}$ を直接更新するのでなく $\omega$ をパラメータとして更新量を調節

$0 < \omega < 1$ : 過小　$\omega = 1$ : Gauss-Seidel 法　$1 < \omega < 2$ 過大

2倍半

2007 実習教材
プリント

```
function LEQ(A0,R,b)
% Solves Linear Equations by Stationary Iterative Method
%              M. Hasegawa: May 19, 2006
s=size(A0); x = rand(s(1),1); k= 0; res= 1;
while ( res > 1.0e-8)
   y = A0\(R*x+b);
   k = k+1;
   res = norm(y-x,2);
   x = y;
   out = [k res];
   disp(sprintf('%5d %20.8e',out))
end
x
```

sは行列A₀のサイズ, xは乱数ベクトル

$A_0 y = Rx + b$

$(y = A_0^{-1}(Rx + b))$

変化量を2-ノルムで

出力

出力

これを実行するには、MATLAB のウインドウで Current Directory を変更し、
コマンドウィンドウに LEQ(A0,R,b) と入力します。
what で M-ファイルの一覧、help LEQ で LEQ 関数のコメント部分
（% から始まる行）が表示されます。

どのような変数が作られているかの一覧を調べるには who, whos コマンド、
それらの変数の内容をみるには変数名を入力します。

```
>> A0=[ 1 0 0 0; 0 2 0 0; 0 0 2 0; 0 0 0 2]

A0 =

     1     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     2

>> R=A0-A;

>> LEQ(A0,R,b)

    1     2.60843061e+000
    2     2.23826812e+000
    3     2.10139665e+000

   中略

 1006     1.01665179e-008
 1007     1.00312625e-008
 1008     9.89780639e-009

x =

  -0.99999961572770
   1.00000037915894
  -0.99999963604112
   1.00000033907360

>> eig(inv(A0)*R)

ans =

  -0.90244107895598
  -0.23404854350965
   0.98669509008469
   0.59979363238085
```

A₀をAの対角要素で
($a_{44}$は少し変更した)

$A = A_0 - R$

反復法によってA₀(またはR)の
決め方が異なる。

1008回で収束（1009回というべきか？）

反復法による解

$eig(A_0^{-1}R)$ 絶対値最大の固有値の絶対値が
スペクトル半径．この場合
$\rho(A_0^{-1}R) = 0.9866\ldots$

2006年05月19日

櫻井鉄也，MATLAB/Scilabで理解する数値計算，東大出版会，2003
大石進一，LINUX数値計算ツール，コロナ社，2000

2007 実習教材 2.

計算数学I LAB2

2006.7.3.
2007.7.9.

③

1. CG法を用いて連立1次方程式 $Ax=b$ を解く（Aは対称）

CG(A, b)

反復回数, $\|r_k\|$, $R^TR$, $P^TAP$ が表示される。Rの第k列ベクトルは $r_k$, Pの第k列ベクトルは $p_k$ である。

- 収束すること、$(r_i, r_j)=0\ (i\neq j)$, $(p_i, Ap_j)=0\ (i\neq j)$ を確かめよ。

CG.m を利用

- 残差ノルム R に入っている の 各ベクトルが 直交することを確認
- 収束すること （最後の1回 に注目）
- pベクトルの A-直交性を調べる.