偏微分方程式・常微分方程式

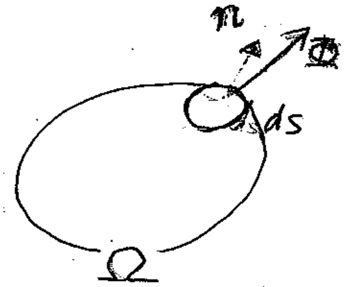
1. 物理現象をモデル化：

物理量の保存則

$u(x,t)$ … 単位体積あたり $(\cdot/cm^3)$

Ω 領域

Γ 境界



(保存則の)積分形式
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u\,dx = -\int_\Gamma \Phi\cdot n\,ds + \int_\Omega f\,dx$$

dx 体積要素（領域 Ω）

ds 面積要素（境界 Γ）

n 境界 Γ の外向き法線ベクトル

Φ u に関する流量ベクトル $(/cm^2\cdot s)$

意味
- 左辺 単位時間当り $\frac{\partial}{\partial t}$ に領域 Ω 中の物理量の総量がどんだけふえるか
- 右辺 表面 Γ からの流入量 $-\int \Phi\cdot n\,ds$ と領域内 Ω での発生量

ガウスの発散定理

$$\int_\Gamma \Phi\cdot n\,ds = \int_\Omega \mathrm{div}\,\Phi\,dx$$

を用いて

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\Phi - f\right) dx = 0$$

この式が場の中の任意の Ω について成り立つ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\Phi = f$$ …… 保存則の微分形式

流量ベクトル Φ は多くの場合

拡散束 $-k\nabla u$

移流束 bu

の和として表わされる

これが、

移流拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(-k(x,u)\nabla u + b(x,u)u) = f(x,u)$$

$u(x,t)$ 場の物理量
x 空間 (1.2.3次元)
t 時間
k 拡散係数
b 移流速度
f 資源 ソース

div. divergence
∇ gradient
rot rotation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(-k(x,u)\nabla u + b(x,u)u) = f(x,u)$$ 非定常 時間依存

$$div(-k(x,u)\nabla u + b(x,u)u) = f(x,u)$$ 定常 $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$

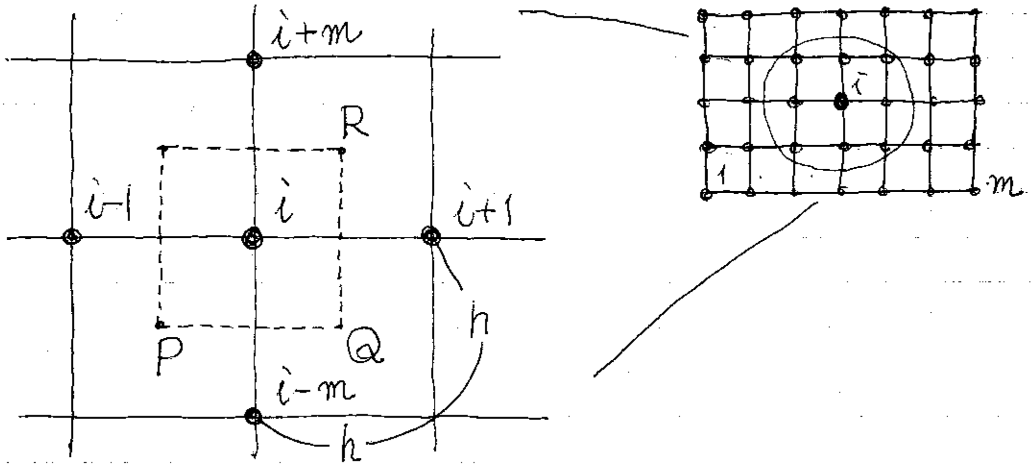
2. 移流拡散方程式を解く

○ 定常・線形 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, k, b は u によらない
〃 非線形 〃 $k(u), b(u)$
非定常 線形 $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ k, b は u によらない
〃 非線形 〃 $k(u), b(u)$

拡散方程式　定常・線形

微分形　$\mathrm{div}\,(-\underset{(x)}{k}\nabla u) = f(x)$

積分形　$0 = -\int_\Gamma (-k(x)\nabla u)\cdot n\, ds = \int_\Omega f(x)\, d\Omega$



点線の四角形を考える

nは外向き法線ベクトル

左辺　$\int_\Gamma (-\cancel{k(x)}\nabla u)\cdot n\, ds$　　$k(x) = k$：一定

$$\to \int_{PQ} - \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} ds + \int_{QR} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ds + \int_{RS} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} ds + \int - \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} ds$$

$$\to \int_{PQ} -k\frac{\partial u}{\partial y}(-1)\, ds + \int_{QR} -k\frac{\partial u}{\partial x}(1)\, ds + \int_{RS} -k\frac{\partial u}{\partial y}(1)\, ds + \int_{SP} -k\frac{\partial u}{\partial x}(-1)\, ds$$

近似 $\to -k\frac{u_i - u_{i-m}}{h}(-1)h + \left(-k\frac{u_{i+1}-u_i}{h}h\right) + \left(-k\frac{u_{i+m}-u_i}{h}h\right) + \left(-k\frac{u_i - u_{i-1}}{h}(-1)h\right)$

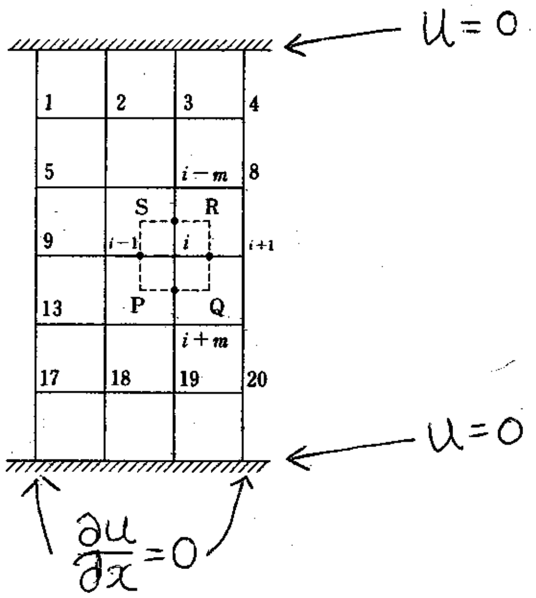
整理すると　$k\left\{ -u_{i-m} \quad -u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} \quad -u_{i+m} \right\}$

右辺　$\int_\Omega f(x)\, d\Omega = \iint_{PQRS} f\, dx\, dy = f_i h^2$

最終的には連立1次方程式 $Au = f$ となる

（Aは特別な構造を持つ）

例1. 図のような場が与えられたとき、拡散方程式 $\mathrm{div}(-k\nabla u)=f$ の係数行列をもとめなさい。拡散係数を k とする.



ヒント:

内点 i についての方程式：

$$(-1)u_{i-m}+(-1)u_{i-1}+(4)u_i+(-1)u_{i+1}+(-1)u_{i+m}=f_ih^2/k$$

点 6, 7, 10, 11, 14, 15

境界上の点 i については（左側境界の場合，右側境界の場合それぞれに）

$$\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-m}+(2)u_i+(-1)u_{i+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i+m}=f_ih^2/2k$$

点 5, 9, 13

$$\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-m}+(-1)u_{i-1}+(2)u_i+\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i+m}=f_ih^2/2k$$

点 8, 12, 16

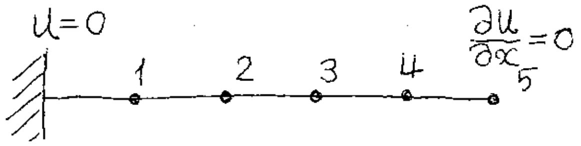
となるハズである。(2, 3), (18, 19), (1), (4), (17), (20) は？

20×20 の対称行列になる

参考文献

- 村田健郎，理工系学生のための基礎数学，現代数学社，199·
- 〃 ，線形代数と線形計算法序説，サイエンス社，1986
- 〃 他，大型数値シミュレーション，岩波書店，1990

例2. 単純な1次元問題ではどうなる？



5×5の3重対角行列になる。