2006.5.22.
Hasegawa

計算数学-1　課題1

A4判のレポート(片面のみ)にまとめ，5/29(月)の授業時に提出せよ
何をどのようにしようとしているかの説明文(目的，方針など)を必要に応じて書くこと。

1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ で与えられる連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える。

(1) Aに対して部分軸選択つきガウスの消去法(消去時に対角要素の絶対値が最大となることを保証する)の前進消去過程を適用せよ

(2) $\boldsymbol{b}=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ の解 $\boldsymbol{x}$ を前進消去・後退代入で求めよ

(3) 各段の操作を表わす行列 P_k, G_k を求め

$$G := G_n P_n \cdots G_1 P_1 \ ;\ U = GA$$

としたときの G, U を求めよ。どうなっているか？

2. 4行4列の行列 A を考える。

(1) 条件数を変化させる(大きくする・小さくする)にはどうしたらよいか？

(1) $Cond_1(A)$, $Cond_2(A)$, $norm_1(A)$, $norm_2(A)$ などの関係が、理論通りであることをコンピュータを用いた数値実験で確かめなさい

3. 4行4列の行列 Aを 係数とする連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える

(1) Jacobi法，Gauss-Seidel法，SOR法* を用いて解いたとき，どのような収束を示すかを確かめよ。そのときの $\rho(A_0^{-1}R)$ は？

(2) 係数行列Aを変えたとき，Aを変えずに $\boldsymbol{b}$ を変えたとき収束はどのように変化するか？

*) SORはオプション

数値処理入門(長谷川 秀彦)　　　MATLAB入門

まずは画面の表示モードを変更します。デフォルトでは more off なので、
出力が多いと画面情報へ流れていってしまいます。 more on としておけば
１画面分の結果が表示されたところで画面がいったん止まります。
１行進ませるにはリターンキー、１画面分進めるにはスペースキーを押します。
途中で終えるには q と入力してください

```
>> more on
>> more off
```

コマンドを調べるには help を使います。 help とすれば使えるコマンドが
分類されて表示されます。分類 general に属するコマンドが知りたければ
help general, more コマンドについて知りたければ more help のように入力します。

```
>> help
```

For more help on directory/topic, type "help topic".

```
>> help ops
```

演算子と特殊キャラクタ

数値演算子

plus	- 加算	+
uplus	- 単項加算	+
minus	- 減算	-
uminus	- 単項減算	-
mtimes	- 行列の乗算	*
times	- 配列の乗算	.*
mpower	- 行列のベキ乗	^
power	- 配列のベキ乗	.^
mldivide	- バックスラッシュ、行列の左除算	¥

以下、省略。

メニューバーからヘルプ (H) を起動してチュートリアルをみることもできます。

```
>> demo
```

demo と入力すれば MATLAB のデモが見られます

MATLAB が扱うのは実数（正確には倍精度浮動小数点数）です。整数も内部では
実数として扱われています。数値の内部表現をみるには

```
>> pi

ans =

    3.1416

>> format long
>> pi

ans =

   3.14159265358979
```

long は 15 桁表示です。標準に戻すには format と入力します。

数、ベクトル、行列の入力は以下のようにします。
b=0; のように行末にセミコロン ; をつけると結果は表示されません。
ベクトル・行列を入力する際はかぎかっこ [ ] を使います。
ベクトルや行列など、次の行のデータを入力する場合はセミコロン ; で区切ります。
= の左辺がない場合は、 ans という変数に格納されます。
転置を作るには ' ダッシュを利用します。

```
>> a=1
```

```
a =

     1

>> b=2;

>> A=[1 -1 0 0; -1 2 -1 0; 0 -1 2 -1; 0 0 -1 1.1]

A =

    1.0000   -1.0000         0         0
   -1.0000    2.0000   -1.0000         0
         0   -1.0000    2.0000   -1.0000
         0         0   -1.0000    1.1000
```

LU 分解を用いて連立１次方程式 A x = b の解を求めるには、以下のようにします。

```
>> b = [ -2; 4; -4; 2.1 ]

b =

   -2.0000
    4.0000
   -4.0000
    2.1000

>> x=A¥b
```

$x = A^{-1} b$ あるいは $x = inv(A) * b$

```
x =

   -1.0000
    1.0000
   -1.0000
    1.0000
```

条件数、ノルムの計算には、関数 norm, cond, eig を使います：

```
>> norm(A,1)

ans =

     4
```

$norm_1(A)$ 1-ノルム

```
>> norm(A,2)

ans =

    3.4218
```

$norm_2(A)$ 2-ノルム

```
>> cond(A,2)

ans =

  149.2780
```

$cond_2(A)$ 条件数 2-ノルム

```
>> cond(A,1)

ans =

  184.0000
```

$cond_1(A)$ 条件数 1-ノルム

MATLAB のプログラムは xxx.m という M-ファイルに一連の手続きを記述します。
% から始まる行はコメントで、あとは MATLAB のコマンドをならべるだけです。
下の例では、 A0, R, b を受け取って、反復法を実行する LEQ という関数の定義です。
while を除けば、これまでの説明で十分に理解できる内容のはずです。

xxx.m の内容：

```
function LEQ(A0,R,b)
% Solves Linear Equations by Stationary Iterative Method
%                H. Hasegawa; May 19, 2006
s=size(A0); x = rand(s(1),1); k= 0; res= 1;
while ( res > 1.0e-8)
   y = A0¥(R*x+b);
   k = k+1;
   res = norm(y-x,2);
   x = y;
   out = [k res];
   disp(sprintf('%5d %20.8e',out))
end
x
```

変化量を2-ノルムで

出力

出力

sは行列A_0のサイズ, xは乱数ベクトル

$$A_0 y = Rx + b$$
$$(y = A_0^{-1}(Rx+b))$$

これを実行するには、MATLAB のウインドウで Current Directory を変更し、
コマンドウィンドウに LEQ(A0,R,b) と入力します。
what で M-ファイルの一覧、help LEQ で LEQ 関数のコメント部分
（ % から始まる行）が表示されます。

どのような変数が作られているかの一覧を調べるには who, whos コマンド、
それらの変数の内容をみるには変数名を入力します。

```
>> A0=[ 1 0 0 0; 0 2 0 0; 0 0 2 0; 0 0 0 2]

A0 =

     1     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     2

>> R=A0-A;

>> LEQ(A0,R,b)

     1       2.60843061e+000
     2       2.23826612e+000
     3       2.10138665e+000

     中略

  1006       1.01665179e-008
  1007       1.00312625e-008
  1008       9.89780639e-009

x =

  -0.99999961572770
   1.00000037915994
  -0.99999963604112
   1.00000033907360

>> eig(inv(A0)*R)

ans =

  -0.90244107895598
  -0.23404854350955
   0.98669599008469
   0.59979363238085
```

A_0をAの対角要素で
(a_{44}は少し変更した)

$$A = A_0 - R$$

反復法によってA_0(またはR)の
決め方が異なる。

1008回で収束（1009回というべきか？）

反復法による解

$eig(A^{-1}R)$ 絶対値最大の固有値の絶対値が
スペクトル半径. この場合
$\rho(A_0^{-1}R) = 0.9866 \ldots$

2006年05月19日

櫻井鉄也, MATLAB/Scilabで理解する数値計算, 東大出版会, 2003
大石進一, LINUX数値計算ツール, コロナ社, 2000