2006.7.3.
Hasegawa

計算数学-1　課題2

1. 対称行列に対するCG法における残差ベクトルの直交性

$$(r_i, r_j) = 0 \quad i \neq j$$

を理論的に示しなさい。また $Ax = b$ が $f(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b)$ の最小化になっていることについても示しなさい。

2.
$$A(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1+\beta \end{pmatrix}$$
とする。

(1) $\beta = 1$ と 0.1 に対して、べき乗法・逆反復法を用いて全固有値を求めよ

(2) $\beta = 1$ と 0.1 に対して、条件数 $Cond_1(A)$, $Cond_2(A)$ を概算せよ.
対称行列Aの2-ノルムは $\|A\|_2 = |\lambda|_{max}$ であり、べき乗法・逆反復法で数回の反復を行なった近似値を使えばよい

(3) 対称行列Aの固有値分布（βを変化させる）とシフト点 σ のとり方によって逆反復法の収束がどのように変化するかを数値実験によって調べなさい.

(4) 複数の反復法を用いて（たとえば Jacobi法, Gauss-Jordan法, SOR法, CG法, CR法など）

$$Ax = (0\ 0\ 0\ 0\ \beta)^T$$

$$Ax = (-2\ 4\ -4\ 4\ -2-\beta)^T$$

を解き、反復法の収束がどのように変化するかを調べなさい.

計算数学I LAB2

1. CG法を用いて連立1次方程式 $Ax=b$ を解く（Aは対称）

$$CG(A, b)$$

反復回数, $\|r_k\|$, R^TR, P^TAP が表示される。Rのk-列ベクトルは r_k, Pのk-列ベクトルは p_k である

- 収束すること, $(r_i, r_j)=0\ (i \neq j)$, $(p_i, Ap_j)=0\ (i \neq j)$ を確かめよ.

難 2. Conjugate Residual（共役残差法）は (r_k, r_k) を最小化する反復法である。以下のアルゴリズムに基づいて $CR(A, b)$ を作ってみよ

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$
$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$$

とおいて (r_{k+1}, r_{k+1}) を最小化するように α_k を求める.

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

として Ap_{k+1} と Ap_k が直交するように β_k を求める.

- 収束すること, $(Ap_i, Ap_{i+1})=0$, $(r_i, Ap_{i+1})=0$ を確かめよ.

3. 対称行列Aに対して Givens回転を適用するには

$$A = Givens(A, i, j)$$

i-j要素をゼロにする

とすれば左辺のAには R^TAR, RはGivens回転の行列が入る.

- この操作を何度か繰り返して, 固有値を求めてみよ
  どのようにすれば効率よく対角化できるだろう？
- 対角化はたいへんだが、3重対角化は容易である（本当？）

4. 対称行列Aに対してべき乗を施せば、絶対値最大の固有値に対する固有ベクトル，レーリー商を用いて固有値を求めることができる．

- 任意のベクトルにAを作用させ（必要ならば正規化し）絶対値最大の固有値に対応する固有ベクトルの方向に収束することを確かめなさい．

5. 逆反復法を用いて 対称行列Aのαに近い固有値を求めるには

gyaku(A, α)

とすれば、回数k，固有値の近似値λ_k，残差r_kが表示される．

また区間x_lからx_rまでをΔxおきに探索するには

loop(A, x_l, x_r, Δx)

と与えればよい．

- 対称行列Aの固有値分布とシフト点αのとり方によって固有値に収束するまでの反復回数はどのように変化するか？

MATLABコマンド

A=[1 -1 0 0 0; -1 2 -1 0 0; 中略; 0 0 0 -1 2]

x=[1 1 1 1 1]'

b = A*x

[V D] = eig(A) …… V(:,1) … 1本目の固有ベクトル／Vは固有ベクトル，Dは固有値（対角要素）

x'*y　　xとyの内積

sqrt(x'*x)　…　xの2-ノルム

eigshow

help