計算数学 1 レポート解答・解説

作成者：松永浩介

2009 年 5 月 25 日

1(1) 部分軸選択つき Gauss の消去法によって連立方程式を解く.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 & = -8 \\ \quad - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ \quad -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

<u>第 1 段</u>

1 列目において絶対値の最大は 2 行目にあるので 1 行目と 2 行目を交換する.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = -8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 7 \\ \quad - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ \quad -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

2 行目以下の 1 列目を消去するために 1 行目の $\frac{1}{2}$ 倍を 2 行目に加える.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = -8 \\ \quad x_2 - x_3 & = 3 \\ \quad - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ \quad -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

<u>第 2 段</u>

2 列目において絶対値最大は 2 行目にあるので行の交換は行わない.(2 行目, 4 行目ともに 2 列目の <u>絶対値は 1</u> のため**交換する必要がない.**)

3 行目以下の 2 列目を消去するために 2 行目の 1 倍を 4 行目に加える.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = -8 \\ \quad x_2 - x_3 & = 3 \\ \quad - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ \quad x_3 - x_4 & = 3 \end{cases}$$

<u>第 3 段</u>

3 列目において絶対値最大は 3 行目にあるので行の交換は行わない.(3 行目, 4 行目ともに 3 列目の <u>絶対値は 1</u> のため**交換する必要がない.**)

4 行目の 3 列目を消去するために 3 行目の 1 倍を 4 行目に加える.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = -8 \\ \quad x_2 - x_3 & = 3 \\ \quad - x_3 + 2x_4 & = 0 \\ \quad x_4 & = 3 \end{cases}$$

以上で前進消去が完了である．この行列は対角成分に 0 がない上三角行列より正則である．
後退代入で解を求める．

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 \\ x_3 &= 2x_4 = 2\cdot 3 = 6 \\ x_2 &= x_3 + 3 = 6 + 3 = 9 \\ x_1 &= x_2 - 4 = 9 - 4 = 5 \end{aligned}$$

よって，解は $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ 　　$\boxed{\text{注}}$ 解は縦ベクトルで書くこと．$x = (5, 9, 6, 3)^{\mathrm{T}}$ は OK.

(2) P_1 は 1 段における入れ換え行列を表わす行列より，1 行と 2 行を入れ換える行列である．よって，

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に，G_1 は 1 段における 2 行以下の 1 列目を消去する行列より，1 行目の $\frac{1}{2}$ 倍を 2 行目に加える行列である．よって，

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同様にして，$P_2,\ G_2,\ P_3,\ G_3$ を求めると，

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

以上より，

$$\underline{G} = G_3P_3G_2P_2G_1P_1 = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

また，

$$\underline{U} = GA = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(ここで，U が (1) での前進消去で得られた行列と一致していることを確認する.)

また，方程式の交換が起こらないように最初に方程式の交換をしたと考えれば

$$G_3G_2G_1(P_3P_2P_1A) = U$$

となるはずである．そこで $P = P_3P_2P_1$, $L^{-1} = G_3G_2G_1$ とみなせるので

$$\underline{P} = P_3P_2P_1 = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$L = (G_3 G_2 G_1)^{-1} = G_1^{-1} G_2^{-1} G_3^{-1}$$

G_k の意味を考えれば, G_k の逆行列は以下のようになる.

$$G_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

以上より,

$$\underline{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(3) $A\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_k$ ($\boldsymbol{e}_k$ は座標ベクトル) の両辺に左側から行列 G をかけると,

$$GA\boldsymbol{x}_k = G\boldsymbol{e}_k$$

ここで, 右辺は行列 G の第 k 列となっている. また左辺は行列 A に行列 G を左側からかけていることから, ガウスの消去法における前進消去法を行っていることが分かる. よって, (1) の後退代入法と同様にして $\boldsymbol{x}_k$ 求めることができる.
$k = 1$ のときを求めると,

$$U\boldsymbol{x}_1 = GA\boldsymbol{x}_1 = G\boldsymbol{e}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{11} - 2x_{12} & = 0 \\ \quad x_{12} - x_{13} & = 1 \\ \quad -x_{13} + 2x_{14} & = 0 \\ \quad x_{14} & = 1 \end{cases}$$

よって, 後退代入で解を求める.

$$\begin{aligned} x_{14} &= 1 \\ x_{13} &= 2x_{14} = 2 \cdot 1 = 2 \\ x_{12} &= x_{13} + 1 = 2 + 1 = 3 \\ x_{11} &= x_{12} = 3 = 3 \end{aligned}$$

同様にして, $\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4$ を求めると,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上より, 求める行列は

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

また, この行列は A の逆行列になるはずなので, 検算しておくべきである.

2.

$$\text{ベクトルの 2-ノルム}\quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{行列の 2-ノルム}\quad \|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

(1) 行列 A の絶対値最大の固有値を α, , 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とすると,

$$\|A\|_2 = \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \geq \frac{\|A\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2} = \frac{\|\alpha\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2} = |\alpha|\frac{\|\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2} = |\alpha| = \rho(A)$$

(2) 以下, n 次元において証明を行う.

A : 対称より, 固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1\cdots n)$ を, $\{\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n\}$ が直交基底になるようにとれる. よって, 任意に $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をとると,

$$\exists c_i\ ;\ \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

よって,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i\right\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i)\ (\because i\neq j \Rightarrow (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2 \|\boldsymbol{v}_i\|_2^2
\end{aligned}$$

次に, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ に対する固有値を λ_i (A:対称より実数) とし, 以下の変形を行う.

$$\begin{aligned}
\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= \left(A^{\mathrm{T}}A\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i{\lambda_i}^2\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2{\lambda_i}^2(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2{c_i}^2\|\boldsymbol{v}_i\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(A)^2{c_i}^2\|\boldsymbol{v}_i\|_2^2 = \rho(A)^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2
\end{aligned}$$

両辺の平方根をとって割り算すると,

$$\therefore \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \leq \rho(A)$$

$$\therefore \|A\|_2 = \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \leq \rho(A)$$

よって, (1) と合わせて,

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

を得る.