計算数学1　第2回課題解説

2007.7.16
作成者　田村博志

1

$$\alpha > 0, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$ のとき

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}+3 & \alpha^{-1}+2 & \alpha^{-1}+1 & \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1}+2 & \alpha^{-1}+2 & \alpha^{-1}+1 & \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1}+1 & \alpha^{-1}+1 & \alpha^{-1}+1 & \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1} & \alpha^{-1} & \alpha^{-1} & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ と$\alpha = 10^{-2}$のときの $Cond_p(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ $(p = 1, 2)$ を求める.ここで

$$\|A\|_p := sup\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}; \|\boldsymbol{x}\|_p > 0\right\} \ \|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

とくに実際の計算では

$$\|A\|_1 = max\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|; 1 \leq j \leq n\right\}$$
$$\|A\|_2 = (max\{A^*A \text{ の固有値 }\})^{\frac{1}{2}}$$

$\|A\|_p (p = 1, 2)$ の2通りの表示の同値性

1-norm について
$A = (a_{ij}), \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$ と表記.

$$M := max\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|; 1 \leq j \leq n\right\}$$

とおく. とくに j_0 のときに

$$M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$$

が成立するものとする.このとき任意の$\boldsymbol{x}$について

$$\begin{aligned}
\|A\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\right) && \text{三角不等式より} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)|x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} M|x_j| \\
&= M\|\boldsymbol{x}\|_1
\end{aligned}$$

とくに$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_{j_0}$($j_0$番目が 1 でその他が 0 のベクトル) とおくと等号が成立するので $\|A\|_1 = M$ が示された.

2-norm について
(たとえ A が複素行列であっても)A^*A の固有値はすべて非負の実数値である.実際 λを A^*A の固有値の一つ, $\boldsymbol{v}$をその固有値に対する固有ベクトルの一つとすると

$$A^*A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

レーリー商を求めると

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(A^*A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \\
&= \frac{(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$\lambda_{max} :=$ A^*A の最大固有値 ≥ 0 とおく.A^*A の固有ベクトルについて計算しやすいものを導入する.$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$を固有値$\lambda_1, \lambda_2$に対する A^*A の固有ベクトルとする.
(difference)$\lambda_1 \neq \lambda_2$のとき
実は $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$ である.なぜなら

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) &= (A^*A\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_1, A^*A\boldsymbol{v}_2) \\
&= \lambda_2(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)
\end{aligned}$$

よって $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$.
(equal)$\lambda_1 = \lambda_2 (=: \lambda$とおく$)$ のとき
λの固有空間の次元が 2 以上のときは必要ならば Schmidt の直交化を行い固有空間の基底として直交系を選ぶ.

このようにして固有値$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$に対する互いに直交する固有ベクトルの族$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$を得る.任意の$\boldsymbol{x}$につき一意に固有ベクトル分解を許す.

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

やっと道具が揃ったのでこれより 2-norm の計算に移る.

$$\begin{aligned}
(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) &= (A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \\
&= (A^*A(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n), c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= (c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n, c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= \lambda_1 c_1^2(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) + \cdots + \lambda_n c_n^2(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) \\
&\leq \lambda_{max}\left(c_1^2(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_n^2(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n)\right) \\
&= \lambda_{max}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n, c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= \lambda_{max}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

とくに$\boldsymbol{x}$をλ_{max}に対する固有ベクトルに選ぶと等号が成立するので $\|A\|_2^2 = \lambda_{max}$ が示せた.

以上は前置きで, これより本題に移る (といっても計算はすべて計算機任せ).
(a)$\alpha = 1$ のとき
$\|A\|_1 = 4, \|A^{-1}\|_1 = 10$ なので $Cond_1(A) = 40$
$\|A\|_2 = 3.5321, \|A^{-1}\|_2 = 8.2909$ なので $Cond_2(A) = 29.2841$
(b)$\alpha = 10^{-2}$ のとき
$\|A\|_1 = 4, \|A^{-1}\|_1 = 406$ なので $Cond_1(A) = 1624$
$\|A\|_2 = 3.4149, \|A^{-1}\|_2 = 403.5131$ なので $Cond_2(A) = 1377.95\cdots = 1378$
いずれも 2-norm の方の条件数が小さいことがわかる.

2
$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\|B\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|_2$を最小にする$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と最小値を QR 分解を用いて求める.B に QR 分解を行うと次のようになる.

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{5}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|B\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|_2^2 &= (B\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}, B\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\\ &= 2\left(\frac{1}{2}(B^TB\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(B^T\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})\right)+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

最後の $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})$ は$\boldsymbol{x}$に依らない定数なので $\dfrac{1}{2}(B^TB\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(B^T\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})$ を最小にする$\boldsymbol{x}$を求めればよい.

$$A:=B^TB \quad \boldsymbol{b}:=B^T\boldsymbol{c}$$

とおくと行列 A は非負対称行列である.対称性は明らかなので非負性だけ示す.

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= (B^TB\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\\ &= (B\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x})\\ &= \|B\boldsymbol{x}\|_2^2\\ &\geq 0 \qquad\qquad \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3\end{aligned}$$

これより A は非負対称行列で, $\|B\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|_2$の最小値は$\frac{1}{2}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})$ の最小値に帰着され, それは $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$のときに実現される (課題 1 参照).以上により $\|B\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|_2$ は $B^TB\boldsymbol{x}=B^T\boldsymbol{c}$ のとき最小値 $\|B(B^TB)^{-1}B^T\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\|_2$ をとる.方程式 $B^TB\boldsymbol{x}=B^T\boldsymbol{c}$ に $B=QR$ を代入する. $Q^TQ=I_3$ と R の正則性を用いて

$$\begin{aligned}B^TB\boldsymbol{x}=B^T\boldsymbol{c} &\iff (QR)^TQR\boldsymbol{x}=(QR)^T\boldsymbol{x}\\ &\iff R^TQ^TQR\boldsymbol{x}=R^TQ^T\boldsymbol{x}\\ &\iff R\boldsymbol{x}=Q^T\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

これを解くと

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-0.5\\-0.5\end{pmatrix},\ \|B\begin{pmatrix}0\\-0.5\\-0.5\end{pmatrix}-\boldsymbol{c}\|_2=1$$

3

正値対称行列 A に対する $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について CG 法を用いた解法のアルゴリズムを導出する.

$$f(\boldsymbol{x}):=\frac{1}{2}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) \tag{1}$$

とおくと f を最小にする$\boldsymbol{x}$が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$の解であるという事実に基づいて適当な$\boldsymbol{x}_0$から出発して帰納的に近似解$\boldsymbol{x}_k$を構成する.

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k \tag{2}$$

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{r}_0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k \tag{4}$$

ここでα_k は$\boldsymbol{p}_k \neq \boldsymbol{o}$(もちろん$\boldsymbol{o}$のときはそこで終了) が定まったとき $f(\boldsymbol{x}_{k+1})$ を最小にするものを選ぶ.(2), (4) ならびに A の対称性を用いて

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_{k+1}) &= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+1}) - (\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{b}) \\
&= \frac{1}{2}(A(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k), \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k) - (\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{b}) \\
&= f(\boldsymbol{x}_k) + \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x}_k, \alpha_k \boldsymbol{p}_k) + \frac{1}{2}(\alpha_k A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{x}_k) + \frac{1}{2}(\alpha_k A\boldsymbol{p}_k, \alpha_k \boldsymbol{p}_k) \\
&\quad - (\alpha_k \boldsymbol{p}_k, A\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{r}_k) \\
&= f(\boldsymbol{x}_k) - \frac{1}{2}\alpha_k(A\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}_k) + \frac{1}{2}\alpha_k(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{x}_k) + \frac{1}{2}\alpha_k^2(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k) - \alpha_k(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k) \\
&= f(\boldsymbol{x}_k) + \frac{1}{2}\alpha_k^2(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k) - \alpha_k(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k)
\end{aligned}$$

よってこれを最小にするα_kは

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k)}{(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k)} \tag{5}$$

で与えられる.$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{p}_0, \alpha_0$は決まったので以下 k 番目まで決まったとして $k+1$ 番目を構成する.まず$\boldsymbol{x}_{k+1}$は (4) によって定義される. $\boldsymbol{r}_{k+1}$は (2) によって定義される.

$$\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_{k+1} \tag{6}$$

しかし (6) は $k+1$ 番目の量を使わずに次のようにも書ける.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{k+1} &= \boldsymbol{b} - A(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k) \\
&= \boldsymbol{r}_k - \alpha_k A\boldsymbol{p}_k
\end{aligned} \tag{7}$$

次に$\boldsymbol{p}_{k+1}$ を決める.$\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{o}$のときは次に進む必要がないので$\boldsymbol{o}$でないとする.$\alpha_k$ は $\boldsymbol{p}_k$ 方向だけでの f の最小値を決めているので全空間での最小値に近づけるためには$\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \cdots$などがいろいろな方向を向いている, つまり 1 次独立であるのが望ましい.

$$\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{p}_k \tag{8}$$

の形でβ_kを

$$(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_{k+1}) = 0 \tag{9}$$

なるように選ぶ.

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_{k+1}) &= (A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{p}_k) \\
&= (A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_{k+1}) + \beta_k (A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

これより

$$
\beta_k = -\frac{(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k)}
$$

α_{k+1}は (5) によって決まる.またα_kの分子は次のようにも書ける.$k \geq 1$ について

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k) &= (\boldsymbol{r}_k + \beta_{k-1}\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{r}_k) && \text{(8) より} \\
&= (\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k) + \beta_{k-1}(\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{r}_{k-1} - \alpha_{k-1} A\boldsymbol{p}_{k-1}) && \text{(7) より} \\
&= (\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k) + \beta_{k-1}\left((\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{r}_{k-1}) - \frac{(\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{r}_{k-1})}{(A\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{p}_{k-1})}(A\boldsymbol{p}_{k-1}, \boldsymbol{p}_{k-1}) \right) && \text{(5) より} \\
&= (\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)
\end{aligned}
$$

特に $k = 0$ のときも$\boldsymbol{p}_0$の定義から $(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{r}_0) = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0)$.これより

$$
\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)}{(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k)}
$$

β_kについては直交性 $(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_{k+1}) = (A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_{k-1}) = 0$ を認めれば$\alpha_k > 0$ なので

$$
\begin{aligned}
\beta_k &= -\frac{(\alpha_k A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\alpha_k A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k)} \\
&= -\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\alpha_k A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k + \beta_{k-1}\boldsymbol{p}_{k-1})} && \text{(7)(8) より} \\
&= \frac{(\boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\alpha_k A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k)} && \text{直交性より} \\
&= \frac{(\boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_k)} && \text{(7) より} \\
&= \frac{(\boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)} && \text{直交性より}
\end{aligned}
$$

以上から $\boldsymbol{x}_0$ は任意として

$$
\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0 \quad \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{r}_0(\text{初期設定}) \tag{10}
$$

$$
\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)}{(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k)} \tag{11}
$$

$$
\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k \tag{12}
$$

$$
\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_{k+1} \tag{13}
$$

$\|\boldsymbol{r}_{k+1}\|_2$がある程度大きいとき次のステップへ ($\epsilon > 0$ を決めて $\|\boldsymbol{r}_{k+1}\|_2 \geq \epsilon$などをループの条件に組み込む).そうでないときは$\boldsymbol{x}_{k+1}$を解として採用.

$$\beta_k = \frac{(\boldsymbol{r}_{k+1}, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{p}_k \tag{15}$$

直交性 $(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j) = (A\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = 0 (i \neq j)$ の証明
$(A\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = (\boldsymbol{p}_i, A\boldsymbol{p}_j)$ より $i < j$ としても一般性を失わない. $0 \leq i < j \leq k$ で成立することを k について帰納法で示す.
• $k = 1$ のとき (つまり $i = 0, j = 1$)

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1) &= (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{r}_0 - \alpha_0 A\boldsymbol{p}_0) \\
&= (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{r}_0) - \frac{(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{r}_0)}{(A\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_0)} \\
(A\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1) &= 0 && \text{(9), すなわち}\boldsymbol{p}_1\text{の定義より}
\end{aligned}$$

• k 以下までを認めて $k+1$ のときを示す ($i \leq k$ かつ $j = k+1$ を調べればよい).

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_{k+1}) &= (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_k - \alpha_k A\boldsymbol{p}_k) \\
&= (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_k) - \alpha_k (\boldsymbol{r}_i, A\boldsymbol{p}_k) \\
&= (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_k) - \alpha_k (\boldsymbol{p}_i - \beta_{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}, A\boldsymbol{p}_k) \\
&= (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_k) - \frac{(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k)}{(A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_k)} (\boldsymbol{p}_i, A\boldsymbol{p}_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで $i < k$ のときは帰納法の仮定より. $i = k$ のときは $(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k) = (\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k)$ を用いた (6 ページ参照).
$i < k$ のとき

$$\begin{aligned}
(A\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_{k+1}) &= (A\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{p}_k) && \text{(8) より} \\
&= (A\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{r}_{k+1}) \\
&= \frac{1}{\alpha_i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{k+1}) && \text{(7) より} \\
&= 0 && \text{前半の } (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j) = 0 (i < j) \text{ により}
\end{aligned}$$

$i = k$ のとき $(A\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_{k+1}) = (A\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_{k+1}) = 0$ なることは$\boldsymbol{p}_{k+1}$の構成法から明らか.
これより直交性は示された.