

2018年03月22日

行列のグレースケール画像を用いた BiCG法収束予測の試み

○太田凌(筑波大学大学院 図書館情報メディア研究科)
長谷川秀彦(筑波大学 図書館情報メディア系)

日本応用数理学会「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会 第15回研究会

研究の目的

BiCG法の収束・非収束を機械学習により予測

BiCG法で収束する行列
→ BiCG法で解く

BiCG法で収束しない行列
→ 高精度演算
他の解法
前処理行列など

展望

2

対象

- SuiteSparse Matrix Collectionの次数50万以下の非対称実行列875個
- 収束する行列には1, 収束しない行列には0

BiCG法による875個の行列の収束結果

収束性 係数行列	収束(1)	非収束(0)	合計
A	234	641	875
CA	299	576	875

3

BiCG法の設定

x_0 is initial guess ,
Compute $r_0 = b - Ax_0$,
Choose r_0^* such that $(r_0^*, r_0) \neq 0$,
Set $p_0 = r_0$ and $p_0^* = r_0^*$,
For $k = 0, 1, 2, \dots$, **until** $\|r_k\|_2 \leq \epsilon_{TOL} \|b\|_2$ **do**:

$q_k = Ap_k, q_k^* = A^T p_k^*$,
 $\alpha_k = \frac{(r_k^*, r_k)}{(p_k, q_k)}$,
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$,
 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k, r_{k+1}^* = r_k^* - \alpha_k q_k^*$,
 $\beta_k = \frac{(r_{k+1}^*, r_{k+1})}{(r_k^*, r_k)}$,
 $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k, p_{k+1}^* = r_{k+1}^* + \beta_k p_k^*$,

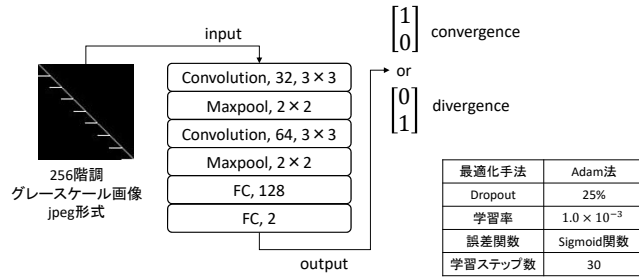
変数と条件	変数と実験の設定
相対残差ノルム $\Delta \epsilon_{TOL}$	$\epsilon_{TOL} = 1.0 \times 10^{-6}$
初期解 x_0	$x_0 = 0$
真解 x	$x = [1, -1, \dots, (-1)^{n-1}]^T$
ベクトル b	$b = A[1, -1, \dots, (-1)^{n-1}]^T$
ベクトル r_0	$r_0 = r_0$
実行時間上限	600秒
計算精度	double

End For

4

分類器作成

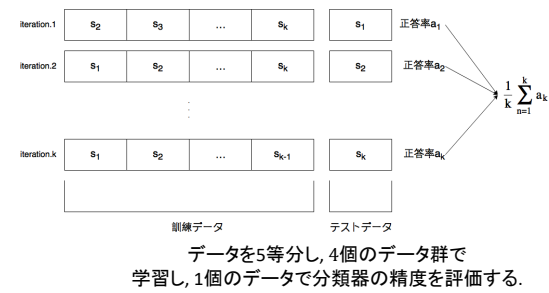
畳み込みニューラルネットワーク(CNN)



5

分類器の評価

5-fold交差検証を用いた。



6

データ数の調整

画像行列	収束性	収束(1)	非収束(0)	合計
A		234	641	875
CA		299	576	875

収束/非収束で行列のデータ数が不均衡



行列Aでは非収束行列641個の中から234個、

行列CAでは576個の中から299個

をランダムに取り出し収束/非収束のデータ数を調整

7

行列画像生成の流れ

1. 行列Aの絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げをsとする
画像サイズ
3. 行列Aをs × sのブロックに分割する
4. s × sブロックの最大値をとり, small Aの1要素にする
5. small Aの非零要素に常用対数をとる, xとする
6. xの中央値を128に対応させ、濃度値を付与
7. 画像をresizeする

8

例: 08blocksから画像を作る

1. 元の行列 A に対して絶対値をとる. $A = \text{fabs}(A)$

9

行列画像生成の流れ

1. 行列 A の絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げを s とする
画像サイズ
3. 行列 A を $s \times s$ のブロックに分割する
4. $s \times s$ ブロックの最大値をとり, small A の1要素にする
5. small A の非零要素に常用対数をとる, x とする
6. x の中央値を128に対応させ, 濃度値を付与
7. 画像をresizeする

10

例: 08blocksから画像を作る

1. 元の行列 A に対して絶対値をとる. $A = \text{fabs}(A)$
2. $s = \text{ceil}\left(\frac{N}{\text{size}}\right) = \text{ceil}\left(\frac{300}{112}\right) = 3$

11

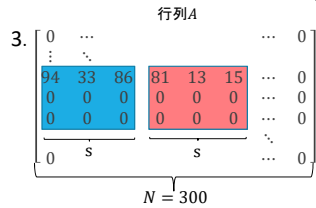
行列画像生成の流れ

1. 行列 A の絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げを s とする
画像サイズ
3. 行列 A を $s \times s$ のブロックに分割する
4. $s \times s$ ブロックの最大値をとり, small A の1要素にする
5. small A の非零要素に常用対数をとる, x とする
6. x の中央値を128に対応させ, 濃度値を付与
7. 画像をresizeする

12

例: 08blocksから画像を作る

1. 元の行列Aに対して絶対値をとる. $A = \text{fabs}(A)$
2. ブロックのサイズは $s = \text{ceil}\left(\frac{N}{\text{size}}\right) = \text{ceil}\left(\frac{300}{112}\right) = 3$



13

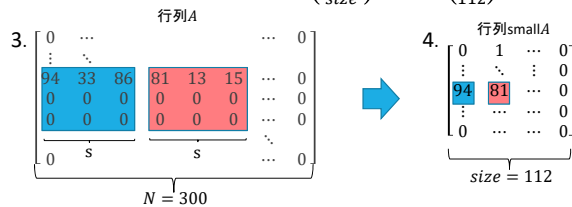
行列画像生成の流れ

1. 行列Aの絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げをsとする
画像サイズ
3. 行列Aをs×sのブロックに分割する
4. s×sブロックの最大値をとり, small Aの1要素にする
5. small Aの非零要素に常用対数をとる, xとする
6. xの中央値を128に対応させ, 濃度値を付与
7. 画像をresizeする

14

例: 08blocksから画像を作る

1. 元の行列Aに対して絶対値をとる. $A = \text{fabs}(A)$
2. ブロックのサイズは $s = \text{ceil}\left(\frac{N}{\text{size}}\right) = \text{ceil}\left(\frac{300}{112}\right) = 3$



15

行列画像生成の流れ

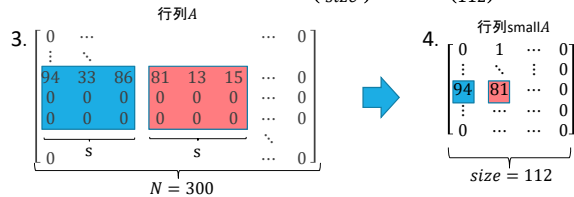
1. 行列Aの絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げをsとする
画像サイズ
3. 行列Aをs×sのブロックに分割する
4. s×sブロックの最大値をとり, small Aの1要素にする
5. small Aの非零要素に常用対数をとる, xとする
6. xの中央値を128に対応させ, 濃度値を付与
7. 画像をresizeする

16

例: 08blocksから画像を作る

1. 元の行列Aに対して絶対値をとる. $A = \text{fabs}(A)$

2. ブロックのサイズは $s = \text{ceil}\left(\frac{N}{\text{size}}\right) = \text{ceil}\left(\frac{300}{112}\right) = 3$



5. 行列small Aの非零要素に常用対数を取り, 配列に格納する.

$$x = \log_{10}(\text{nonzeros}(\text{small } A))$$

行列画像生成の流れ

1. 行列Aの絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げをsとする
画像サイズ
3. 行列Aをs×sのブロックに分割する
4. s×sブロックの最大値をとり, small Aの1要素にする
5. small Aの非零要素に常用対数を取り, xとする
6. xの中央値を128に対応させ, 濃度値を付与
7. 画像をresizeする

例: 08blocksから画像を作る

6. xに対する中央値, 標準偏差を求め, 以下の範囲を定める.

$$Me(x) - \sigma(x) < \log_{10}(val) < Me(x) + \sigma(x)$$

$$Me(x) = 0, \sigma(x) = 0.915 \text{ なので,}$$

$$-0.915 < \log_{10}(val) < 0.915$$

$$\text{ここで, } 10^0 = 1, 10^{0.915} = 8.22, 10^{-0.915} = 0.12 \text{ なので,}$$

$$0.12 < val < 8.22 \cdots (\#)$$

(#)にある数に対して, 以下の式で濃度を与えると, 行列の値1に対応する濃度は

$$1 + \text{ceil}\left(\frac{(256-2)(\log_{10}(1) - (Me(x) - \sigma(x)))}{2\sigma(x)}\right) = 128$$

$$\log_{10}(val) \leq Me(x) - \sigma(x) \cdots \text{画素値 } 0$$

$$\log_{10}(val) = Me(x) \cdots \text{画素値 } 128$$

$$\log_{10}(val) \geq Me(x) + \sigma(x) \cdots \text{画素値 } 255 \text{ を与える.}$$

行列画像生成の流れ

1. 行列Aの絶対値をとる
2. 行列の次数の切り上げをsとする
画像サイズ
3. 行列Aをs×sのブロックに分割する
4. s×sブロックの最大値をとり, small Aの1要素にする
5. small Aの非零要素に常用対数を取り, xとする
6. xの中央値を128に対応させ, 濃度値を付与
7. 画像をresizeする

画像サイズ変えた5-fold交差検証の実行結果

	28 × 28	56 × 56	112 × 112	224 × 224
正答率	59.6%	68.2%	76.1%	75.0%

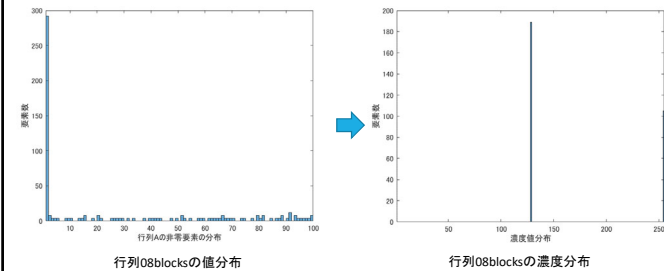
画像サイズにはMNIST(手書き文字の認識実験)で用いられている
28 × 28(pixel)から56 × 56, 112 × 112, 224 × 224(pixel)を検証.

分類器作成に掛かる時間と画像1枚の分類に掛かる時間(s)

	28 × 28	56 × 56	112 × 112	224 × 224
分類器作成	9.77	15.0	30.2	87.9
1枚の分類	2.55	2.68	2.72	2.74

21

濃度付与の問題点



特定の濃度しか使われていない

22

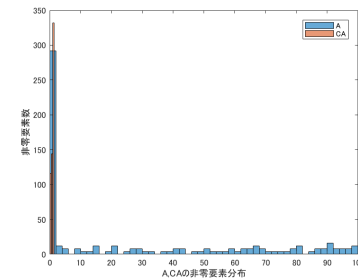
スケーリング行列C

$$C_{(i,i)} := \begin{cases} \frac{1}{|A_{(i,i)}|} & (A_{(i,i)} \neq 0) \\ 1 & (A_{(i,i)} = 0) \end{cases} \quad (1 \leq i \leq N)$$

➡ 絶対値を取ったAの対角成分の逆数を持つ行列

23

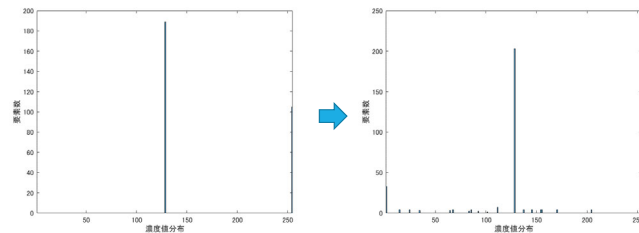
スケーリングによる前処理



	非零要素の分布範囲
A	1 ≤ val ≤ 100
CA	0.02 ≤ val ≤ 1.10

24

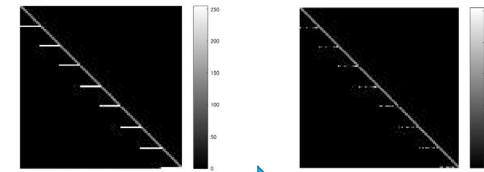
スケーリングによる前処理



スケーリングを実行することで、
グレー(濃度値1~254)になる非零要素が**13.4%**増加した。

25

前処理による画像の変化



最小値	128
最大値	255
非零要素数	294
中央値	128
平均値	173
標準偏差	60.96

最小値	1
最大値	204
非零要素数	294
中央値	128
平均値	109
標準偏差	46.52

26

5-fold交差検証の正答率結果

	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	平均
A	66.0%	83.0%	77.7%	79.8%	73.9%	76.1%
CA	73.3%	79.2%	79.2%	83.3%	80.8%	79.4%

27

まとめ

目的

- ・ BiCG法の収束・非収束を予測すること

手法

- ・ CNNを使った疎行列のグレースケール画像分類

結果

- ・ 非零要素の分布を狭め、画像に使われる濃度値の種類を増やすことで予測精度を改善できた

今後の課題

- ・ 行列の値分布を変えずに、濃度値の種類を増やせるような濃度値付与方法の検討

28