

数式処理研究室

担当教員: 森継 修一

連絡先: 7D214 moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

募集人数: 3人

研究概要: 数式処理のアルゴリズムと応用の研究

数式処理とは、代数的アルゴリズムの設計・解析・実装・応用を扱う情報科学の一分野です。過去には

- 記号的線形代数計算(行列の標準形)
- グレブナー基底を応用した代数方程式の解法／幾何定理の自動証明／

数理折紙への応用(下図: 折り紙による3次方程式の解法)

- 和算で扱われた計算幾何学の問題

などを取り上げてきました。最近では和算を題材として、「**実際の計算が困難なため、これまで未知だった数学公式の発見**」を目標とし、そのために必要なアルゴリズムの考案を行っています。具体的には、

- ◆「円内接多角形問題」(右ページのポスター参照)
- ◆「シュタイナー環の問題」(和算では「円内容累円術」)

などに対し、数式処理システム上で効率よく計算を実行する方法を探ることにより、**未知の公式の“新発見”に複数成功**しました。この分野は、数学とコンピュータサイエンスの境界領域にあり、さらに和算を題材とすることで、数学史の分野への貢献も視野に入れた文理融合型研究を目指したいと考えています。

Message

2019年度から情報メディア創成学類の担当に異動しましたが、GC21201「情報数学Ⅱ」を創成学類発足時から担当しています。代数系の計算に関するプログラミングを入り口として、数式処理研究に興味のある人を募集します。

説明会の日程を特には設定していませんので、まず上記のアドレスにメールしてください。(指導を引き受けるにあたっては、面談が必須です。)

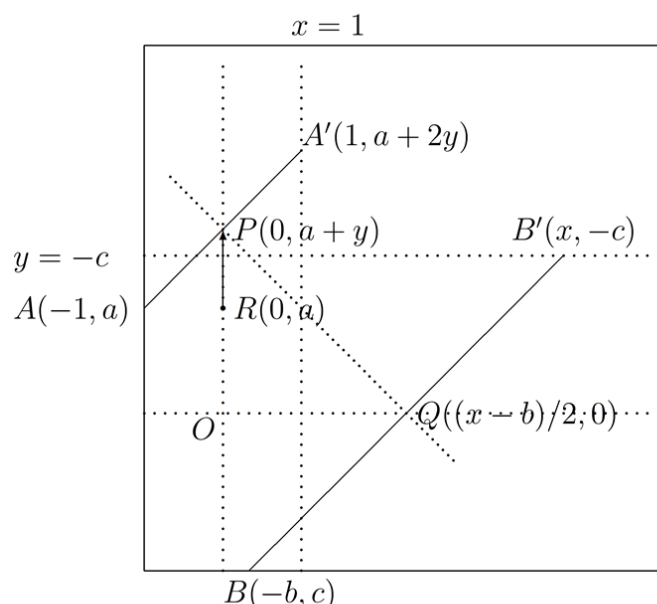


Fig. 5: A solution $\overrightarrow{RP}$ for the cubic equation $t^3 + at^2 + bt + c = 0$

問題の背景

和算とは、江戸時代の日本で独自に発達した数学である。明治以降は西洋数学にとって代わられたが、当時としては世界最先端の内容も含まれていて、これを現代のコンピュータサイエンスの視点で検証してみると、新たな研究課題も見えてくる。ここでは、「円内接多角形問題(特に半径公式の問題)」を取り上げる。この問題は以下のような経緯をたどった。

1. 池田昌意「数学乗除往来」(1674)「円内接五角形の辺長が5,6,7,8,9のとき、外接円の直径を求めよ」
2. 建部賢弘「研幾算法」(1683) 直径を与える正しい14次方程式を導いた
3. 井関知辰「算法発揮」(1690) 独立に、正しい14次方程式を導いた
4. S.Moritsugu (2011) 凸五角形になる場合の外接円の半径は 6.0198...であることを示した(337年ぶりの解決)
5. では、六角形以上に対する半径公式はどのような形をしているのか? 現在のコンピュータでどこまで計算可能か?

研究の現状と未解決問題

1. 計算の手法

下図は井関知辰「算法発揮」による。円内接五角形を2本の対角線により、3つの三角形に分割している。これらの三角形は外接円を共通にもつので、対角線を表す文字を消去すれば、外接円半径と辺長の関係式が導かれる。

消去計算のアルゴリズム＝「終結式の利用」
(西洋数学で確立するのは19世紀半ば以降)
コンピュータによる数式処理でも重要

2. 「円内接多角形問題」における計算の経緯と現状

結果として、世界中で本研究室でしか所持していない公式が複数存在する。最新の結果【八角形の外接円半径公式】は、論文[1]より

Conclusion: Circumradius formula for $n = 7, 8$

For the first time, we have completed the computation of

$$F_{7,8}(s_i; y) = \frac{P_{38}y^{38} + P_{37}y^{37} + \dots + P_1y + P_0}{P_i \in \mathbb{Z}[s_1, \dots, s_7, \varepsilon\sqrt{s_8}] \quad (845,027 \text{ terms}),} \quad (1)$$

where $y = R^2$,

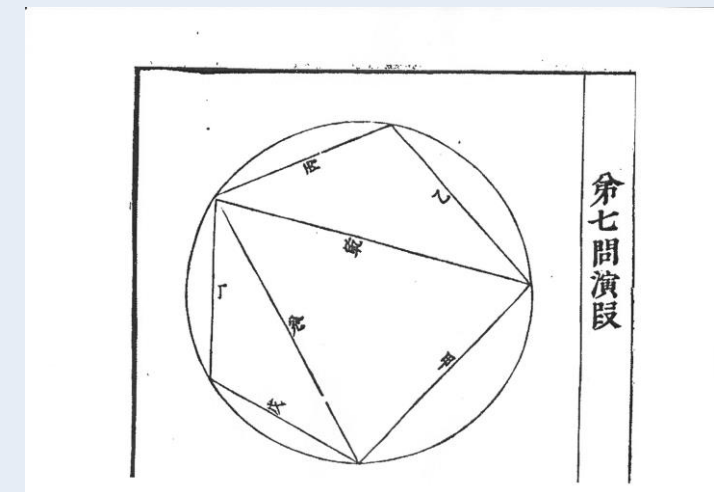
$$\begin{aligned} s_1 &= a_1^2 + \dots + a_8^2, & s_2 &= a_1^2 a_2^2 + \dots, & \dots, \\ s_7 &= a_1^2 \dots a_7^2 + \dots, & \sqrt{s_8} &= a_1 \dots a_8 \end{aligned}$$

($a_8 := 0$ for $n = 7$),

and, ε (crossing parity) means

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (\text{cyclic heptagons}) \\ +1 & (\text{including convex cyclic octagons}) \\ -1 & (\text{other cyclic octagons}) \end{cases}$$

n	面積公式	半径公式	統合公式
3	Heron (1C)	Heron (1C)	Heron (1C)
4	Brahmagupta (628)	Brahmagupta (628)	Brahmagupta (628)
5	Robbins(1994)	建部賢弘(1683)	Moritsugu(2014)
	Pech(2006)	井関知辰(1690)	Moritsugu(2015)
	Moritsugu(2015)	Robbins(1994)	
		Pech(2006)	
6	Robbins(1994)	Moritsugu(2011)	Moritsugu(2015)
	Moritsugu(2015)		
7	Maley et al.(2005)	Moritsugu(2011,2018)	(挑戦中)
8	Maley et al.(2005)	Moritsugu(2019)	(未解決)



3. 今後の課題

- 計算の効率化 -- 現状では、コンピュータ2台(メモリ196GB, 256GB)で、累計CPU時間が数年単位に及ぶ。
- 公式を直接記述するような数学的理論は存在しないのか?

最近の関連論文

- [1] Completing the Computation of the Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Octagons, Moritsugu,S., Bulletin of JSSAC, 25, 2-11, 2019.
- [2] Computation and Analysis of Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Polygons, Moritsugu,S., Communications of JSSAC, 3, 1-17, 2018.
- [3] Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, Moritsugu,S., ADG2014, LNAI 9201, 94-107, 2015.