コンテンツ入門　研究領域紹介

数式処理の計算幾何学への応用

2022年10月14日 (6限)

森継　修一

「数式処理」とは

◆以前: Formula Manipulation (数式処理)

◆現在: Computer Algebra (計算機代数)

cf. 岩波「数学辞典　第4版」(2007)に初収録

代数的計算法をコンピュータ上で効率的に実行するため、アルゴリズムの設計・解析・実装・評価を行う。

■ 自然科学としての情報科学からアプローチ

■ 数学とコンピュータサイエンスの境界領域

もう少し易しくいうと

- 高校数学で扱う題材は、図形に関わる問題を除いて、コンピュータ上でほとんど実行可能
- 例: 式の展開・整理・因数分解
  連立一次方程式の解法
  微分・積分（不定積分・定積分）　など
- 「コンピュータによる数値計算」は、別の大きな領域（工学的応用として重要）
- 幾何の問題 → 座標に関する方程式で表せばコンピュータで実行可能

用語の使い分けには諸説あります。

日本数式処理学会(JSSAC)による説明では

- 計算代数 - 代数学の問題を解くアルゴリズムに関する研究を行う分野
- 計算機代数 - 計算代数のアルゴリズムを計算機上で利用する際に生じる課題及びそれに付随する課題に関する研究を行う分野
- 数式処理 - 数や式(数式)を用いて表現される問題及びそれに付随する課題に対し，計算代数や計算機代数を用いてアプローチする分野の総称

代表的なソフトウェア

- Reduce (現在はfree　最古参のひとつ)
- Risa-Asir (free　日本で開発)

  「第五世代コンピュータ」研究(1980's)から派生した成果
- Mathematica (有償　サイトライセンスあり)
- Maple (有償　高度な数学的アルゴリズム)

  「東ロボくん」プロジェクト(数学)で使用 -- 論理的AI

その他: 汎用・特定の数学分野専用のものあり

扱ったことのある問題の例

- ◆ 連立代数方程式の解法
  グレブナー基底，固有値解法；和算の問題，etc
- ◆ 行列のFrobenius標準形・記号的線形代数計算
- ◆ 代数方程式のガロア群と折り紙による解の表現
- ◆ 和算の問題 （関孝和「発微算法」・宮城清行「明元算法」・井関知辰「算法発揮」）への現代的アルゴリズムの適用
- ◆ 初等幾何の定理の自動証明・計算公式の発見

基礎となる知識
  線形代数・微積分・代数学（整数・可換環） ＋漢文？
  アルゴリズムと計算量 + プログラミング

代表的な和算家と和算書

- 関孝和「発微算法(1674) 」

多変数高次連立方程式の消去計算

「解伏題之法(1683) 」

行列式を理論化 (ただし稿本)

- 建部賢弘「発微算法演段諺解(1685)」

「発微算法」の詳細な解説 (アンチに対抗して出版）

- 井関知辰「算法発揮(1690)」

（関とは独立に) 行列式を理論化した世界初の刊本

「発微算法」第14問の方程式

定数部分をどう決めたのか、は諸説あります。

$$
\begin{cases}
f_1 = x^3 - y^3 - 271 \\
f_2 = y^3 - z^3 - 217 \\
f_3 = z^3 - u^3 - 608/10 \\
f_4 = u^3 - v^3 - 3262/10 \\
f_5 = v^3 - w^3 - 61 \\
f_6 = u^2x^2(v^2 + w^2 + y^2 + z^2) - u^2x^4 - u^4x^2 \quad + v^2y^2(u^2 + w^2 + x^2 + z^2) - v^2y^4 - v^4y^2 \\
\qquad + w^2z^2(u^2 + v^2 + x^2 + y^2) - w^2z^4 - w^4z^2 \; - u^2v^2w^2 - u^2y^2z^2 - v^2z^2x^2 - w^2x^2y^2
\end{cases}
$$

関が「解いた」というのは…

- 変数w, v, u, z, y を順に消去していくと「xだけの1458次式が得られる」ことを示した。（結果は示さず）
- 同様の終結式による消去計算法が西洋数学で用いられるのは、約150年後。
- その「1458次式」が具体的に計算されたのは2005年（木村氏 ほか）。
- 現代のサーバマシンでも、関のアルゴリズムそのものだと数分かかる。（Mathematicaでも直接はムリ？）
- 発微算法の問題のいくつかには、数値解としては「別解」が存在する（Moritsugu & Arai, 2008）。

円中五斜の問題
(円内接多角形問題)

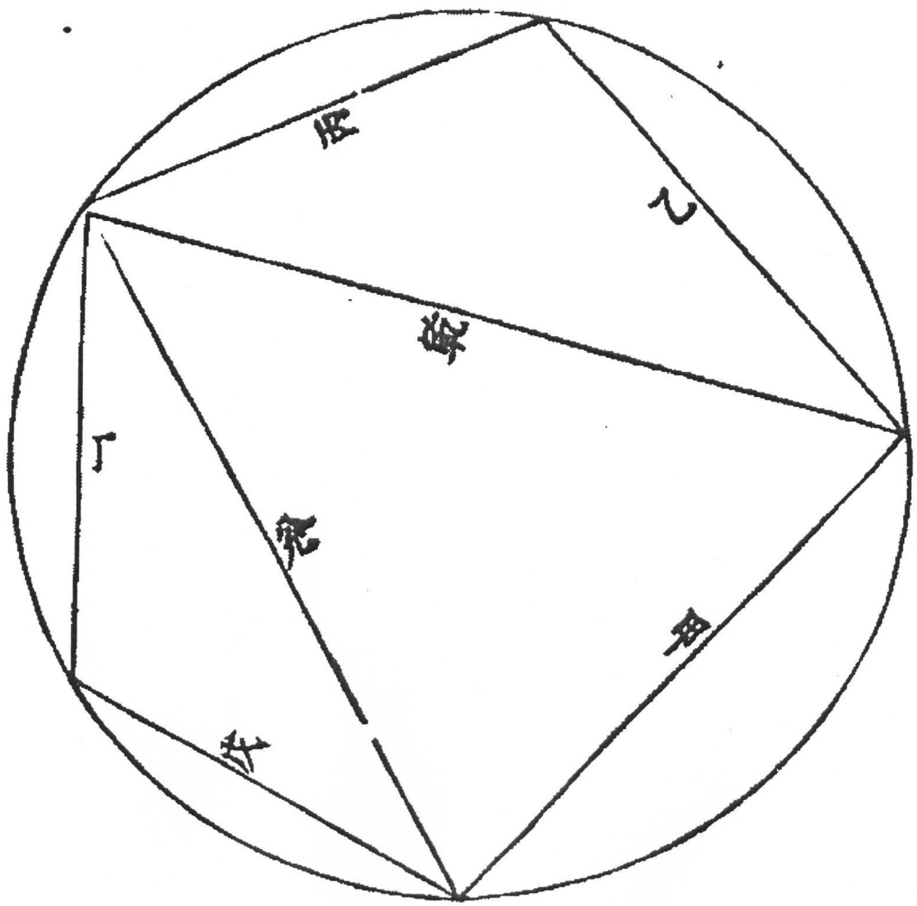
- 池田昌意「数学乗除往来(1674)」遺題第3問

  円に内接する五角形の各辺の長さを5寸,6寸,7寸,8寸,9寸としたとき、外接円の直径を求めよ。

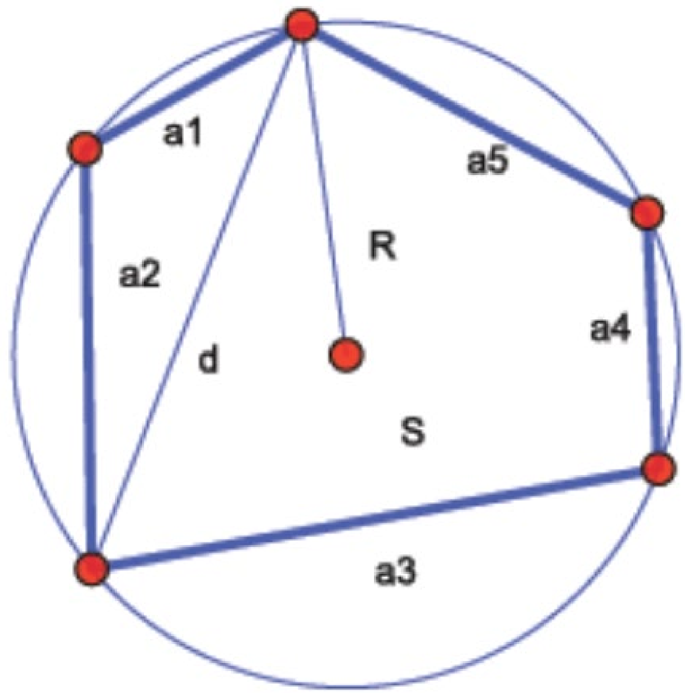
- 井関知辰「算法発揮(1690)」第7問

  各辺の長さを甲,乙,丙,丁,戊で表し、記号計算で消去した結果、「直径に関する14次方程式」を得た。

第七問演段



円内接五角形問題 (現代のソフトウェアによる描画)



S: 五角形の面積　R: 外接円半径

円内接五角形の外接円半径公式についての計算結果

- 現代の数式表現では2,922項になり、井関の方法で得られる多項式と一致
- 全体の形は、R^2に関する7次方程式
- 辺長の組「5,6,7,8,9」に対しては、半径の値としての実数解は5個存在する。
- そのうち、「凸五角形」を表すものは、

$R = 6.0198 \ldots$である。（新発見）

（数理解析研究所講究録 No.1815, pp.124–132, 2012）

最近の発表論文

- Bulletin of JSSAC (2022.4)

  円内接七角形の「面積×半径」公式の計算

- Bulletin of JSSAC (2019.7)

  円内接八角形外接円半径公式問題の完全解決

- Communications of JSSAC (2018.10)

  井関知辰「算法発揮(1690)」の問題からn=7まで

日本語の紀要論文（京都大学数理解析研究所講究録）が意外と参照されているらしい

目標：No one has seen before な公式の導出

面積公式の導出

- n=3 Heron (1C)
- n=4 Brahmaguputa (628)
- n=5 Robbins(1994) Pech(2006)
  Moritsugu (2015)
- n=6 Robbins(1994) Moritsugu (2015)
- n=7,8 Maley et al.(2005)

半径公式の導出

- n=3 Heron (1C)
- n=4 Brahmaguputa (628)
- n=5 建部賢弘(1683) 井関知辰(1690)
  Robbins(1994) Pech(2006)
- n=6,7,8 Moritsugu (2011, 2017, 2018, 2019)

Key: 終結式（シルベスター行列式）
対称式・基本対称式（解と係数の関係）

半径公式 ($n = 7$) の形状

辺長 a_i による表現 (2011)

$$\Phi_7(a_i;\ y) = C_{38}y^{38} + \cdots + C_1 y + C_0$$

337,550,051 項 (7,407MB)

基本対称式 s_i による表現 (2017)

$$F_7(s_i;\ y) = \tilde{C}_{38}y^{38} + \cdots + \tilde{C}_1 y + \tilde{C}_0$$

199,695 項

2018年10月　半径公式の計算完結！

Conclusion: Circumradius formula for $n = 7, 8$

For the first time, we have completed the computation of

$$\begin{aligned} F_{7,8}(s_i;\ y) \ &= \ \tilde{P}_{38}y^{38} + \tilde{P}_{37}y^{37} + \cdots + \tilde{P}_1 y + \tilde{P}_0 \\ &\quad \tilde{P}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_7, \varepsilon\sqrt{s_8}] \qquad (845{,}027 \ \text{terms}), \end{aligned} \tag{1}$$

where $y = R^2$,

$$\begin{aligned} &s_1 = a_1^2 + \cdots + a_8^2, \qquad s_2 = a_1^2 a_2^2 + \cdots, \qquad \cdots, \\ &s_7 = a_1^2 \cdots a_7^2 + \cdots, \qquad \sqrt{s_8} = a_1 \cdots a_8 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_8 := 0 \text{ for } n = 7), \end{aligned}$$

and, ε (crossing parity) means

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{(cyclic heptagons)} \\ +1 & \text{(including convex cyclic octagons)} \\ -1 & \text{(other cyclic octagons)} \end{cases}$$

現在の課題は…

- 「面積×半径」公式 (n=7,8) の計算

  n=7はできたが、n=8となると…
- ADG2014 論文(2015) の拡張

- 研究会発表 (2020.12) の録画が公開されているので、興味があれば別途参照してください。

  (「折紙工学」の著名人が多数講演しています。)

最後に:　数式処理研究に関わるのに必要なこと

- ヒントは至るところにある: 数学は「一般化」「拡張」で発展。
  今回は、和算で取り上げられた計算幾何学の問題と、
  数式処理のアルゴリズムを結びつけた。
- メディアやコンテンツというよりアルゴリズムが主題ではあるが、数学とコンピュータサイエンスの双方に興味がある人には向いているのではないか。

- 数学的素養はできるだけ幅広く備えておいた方がよい。
- 情報メディア創成学類であれば、「情報数学A」「線形代数A・B」「微分積分A・B」に加えて、関連科目を積極的に。