

研究事例紹介: 「和算と数式処理」

数式処理研究室(コンピュータを駆使してマニアックな数学を追求する研究室)
図書館情報メディア系 森継 修一

問題の背景

和算とは、江戸時代の日本で独自に発達した数学である。明治以降は西洋数学にとって代わられたが、当時としては世界最先端の内容も含まれていて、これを現代のコンピュータサイエンスの視点で検証してみると、新たな研究課題も見えてくる。ここでは、「円内接多角形問題(特に半径公式の問題)」を取り上げる。この問題は以下のような経緯をたどった。

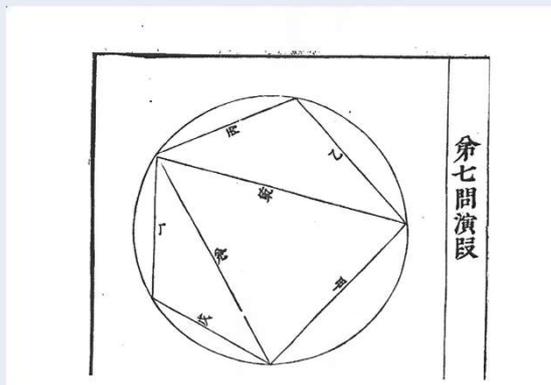
1. 池田昌意「数学乗除往来」(1674) 「円内接五角形の辺長が5,6,7,8,9のとき、外接円の直径を求めよ」
2. 建部賢弘「研幾算法」(1683) 直径を与える正しい14次方程式を導いた
3. 井関知辰「算法發揮」(1690) 独立に、正しい14次方程式を導いた
4. S.Moritsugu (2011) 凸五角形になる場合の外接円の半径は 6.0198...であることを示した(337年ぶりの解決)
5. では、六角形以上に対する半径公式はどのような形をしているのか? 現在のコンピュータでどこまで計算可能か?

研究の現状と未解決問題

1. 計算の手法

下図は井関知辰「算法發揮」による。円内接五角形を2本の対角線により、3つの三角形に分割している。これらの三角形は外接円を共通にもつので、対角線を表す文字を消去すれば、外接円半径と辺長の関係式が導かれる。

消去計算のアルゴリズム=「終結式の利用」
(西洋数学で確立するのは19世紀半ば以降)
コンピュータによる数式処理でも重要



2. 「円内接多角形問題」における計算の経緯と現状

結果として、世界中で本研究室でしか所持していない公式が複数存在する。最新の結果【八角形の外接円半径公式】は、論文[1]より

Conclusion: Circumradius formula for $n = 7, 8$

For the first time, we have completed the computation of

$$F_{7,8}(s_i; y) = P_{38}y^{38} + P_{37}y^{37} + \dots + P_1y + P_0$$

$P_i \in \mathbb{Z}[s_1, \dots, s_7, \varepsilon\sqrt{8}]$ (845,027 terms), (1)

where $y = R^2$,

$$s_1 = a_1^2 + \dots + a_6^2, \quad s_2 = a_1^2 a_2^2 + \dots, \quad \dots,$$
$$s_7 = a_1^2 \dots a_7^2 + \dots, \quad \sqrt{8} = a_1 \dots a_8 \quad (a_8 := 0 \text{ for } n = 7),$$

and, ε (crossing parity) means

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{(cyclic heptagons)} \\ +1 & \text{(including convex cyclic octagons)} \\ -1 & \text{(other cyclic octagons)} \end{cases}$$

n	面積公式	半径公式	統合公式
3	Heron (1C)	Heron (1C)	Heron (1C)
4	Brahmagupta (628)	Brahmagupta (628)	Brahmagupta (628)
5	Robbins(1994)	建部賢弘(1683)	Moritsugu(2014)
	Pech(2006)	井関知辰(1690)	Moritsugu(2015)
	Moritsugu(2015)	Robbins(1994)	
		Pech(2006)	
6	Robbins(1994)	Moritsugu(2011)	Moritsugu(2015)
	Moritsugu(2015)		
7	Maley et al.(2005)	Moritsugu(2011,2018)	(挑戦中)
8	Maley et al.(2005)	Moritsugu(2019)	(未解決)

3. 今後の課題

- 計算の効率化 -- 現状では、コンピュータ2台(メモリ196GB, 256GB)で、累計CPU時間が数年単位に及ぶ。
- 公式を直接記述するような数学的理論は存在しないのか?

最近の関連論文

- [1] Completing the Computation of the Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Octagons, Moritsugu,S., Bulletin of JSSAC, 25, 2-11, 2019.
- [2] Computation and Analysis of Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Polygons, Moritsugu,S., Communications of JSSAC, 3, 1-17, 2018.
- [3] Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, Moritsugu,S., ADG2014, LNAI 9201, 94-107, 2015.